3. Anwendungen

3.1. Chemische Reaktionen

Aufgabe:
Die Gleichung
$x_1NH_3 + x_2O_2 \rightarrow x_3NO_2 + x_4H_2O$
beschreibt die Verbrennung von Ammoniak NH_3 zu Stickstoffoxid und Wasser
Für welche möglichst kleinen natürlichen Zahlen x_1, x_2, x_3 und x_4 ist die Gleichung erfüllt?

Für jede Atomart müssen auf jeder Seite gleich viele Atome vorkommen:

N: $x_1 = x_3$
H: $3x_1 = 2x_4$
O: $2x_2 = 2x_3 + x_4$

$$\left| \begin{array}{llll} x_1 & & -x_3 & = 0 \\ 3x_1 & & -2x_4 & = 0 \\ & 2x_2 & -2x_3 - x_4 & = 0 \end{array} \right|$$

erweiterte Matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Elimination nach Gauss-Jordan liefert die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Die allgemeine Lösung heisst damit
$x_1 = \frac{2}{3}t, x_2 = \frac{7}{6}t, x_3 = \frac{2}{3}t, x_4 = t$
Für t = 6 erhält man die kleinste Lösung mit natürlichen Zahlen
$x_1 = 4,\ x_2 = 7,\ x_3 = 4,\quad x_4 = 6$, womit also gilt:
$4NH_3 + 7O_2 \rightarrow 4NO_2 + 6H_2O.$

Übungsaufgaben:
a) $x_1Fe + x_2O_2 \rightarrow x_3Fe_2O_3$ Rosten von Eisen in trockener Luft
b) $x_1C_6H_{12}O_6 + x_2O_2 \rightarrow x_3CO_2 + x_4H_2O$ Verbrennung von Traubenzucker

Lösung
a) $4Fe + 3O_2 \rightarrow 2Fe_2O_3$
b) $C_6H_{12}O_6 + 6O_2 \rightarrow 6CO_2 + 6H_2O$

3.2 Mischungsrechnung

Aufgabe:
Alpaka (Neusilber) ist eine Legierung aus Kupfer, Nickel und Zink. Wie können mit den vier in der Tabelle angegebenen Sorten 100g Alpaka mit einem Gehalt von 55% Kupfer, 23% Nickel und 22% Zink hergestellt werden?

	I	II	III	IV
Kupfer	40%	50%	60%	70%
Nickel	26%	22%	25%	18%
Zink	34%	28%	15%	12%

Besteht die Legierung aus x_i g der Sorten i mit i = 1, 2, 3, 4 so ergibt sich das System

$$\left|\begin{matrix} 40x_1 & +50x_2 & +60x_3+70x_4 = 5500 \\ 26x_1 & +22x_2 & +25x_3+18x_4 = 2300 \\ 34x_1 & +28x_2 & +15x_3+12x_4 = 2200 \end{matrix}\right|$$

bzw. die erweiterte Matrix

$$\begin{bmatrix} 40 & 50 & 60 & 70 & 5500 \\ 26 & 22 & 25 & 18 & 2300 \\ 34 & 28 & 15 & 12 & 2200 \end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan führt auf die folgende erweiterte Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{10}{7} & -\frac{50}{7} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{7} & \frac{450}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{300}{7} \end{bmatrix}$$

und die allgemeine Lösung
$x_4 = t$
$x_3 = \frac{1}{7}(300 - 4t) = \frac{4}{7}(75 - t)$
$x_2 = \frac{1}{7}(450 - 13t)$
$x_1 = \frac{1}{7}(10t - 50) = \frac{10}{7}(t - 5)$
Da nichtnegative Lösungen gesucht sind muss gelten: $5 \leq x_4 \leq \frac{450}{13}$
Wählt man insbesondere die begrenzenden Werte, so ist eine Herstellung mit drei Sorten möglich:
t = 5: mit Sorten II, III, IV oder $t = \frac{450}{13}$ mit den Sorten I, III, IV

Übungsaufgabe:
a)
Die drei Alkohol-Ammoniak-Wasser-Mischungen F_1, F_2, F_3 haben die in der folgenden Tabelle angegebenen Konzentrationen

	Alkohol	Ammoniak	Wasser
F1	85%	10%	5%
F2	75%	15%	10%
F3	60%	20%	20%

Wie müssen die Anteile x_1, x_2, x_3 der drei Mischungen gewählt werden, damit 1 Liter eines Gemischs mit 70% Alkohol, 16% Ammoniak und 14% Wasser hergestellt werden kann?

Lösung:

$$\left|\begin{array}{llll} 85x_1 & +75x_2 & +60x_3 & = 70 \\ 10x_1 & +15x_2 & +20x_3 & = 16 \\ 5x_1 & +10x_2 & +20x_3 & = 14 \end{array}\right|$$

Die gesuchte Mischung ergibt sich mit 40% von F_1 und 60% F_3.

b)
Rostfreier Stahl ist eine Legierung aus Eisen, Chrom und Nickel.
18/10-Stahl zum Beispiel besteht aus 72% Eisen, 18% Chrom und 10% Nickel.
In der Tabelle ist die Zusammensetzung der drei Legierungen dargestellt. Wieviel Nickel (D) mit Menge x_4 ist zu den Legierungen
A, B und C mit den Mengen x_1, x_2, x_3 mindestens beizufügen, wenn eine Tonne 18/10-Stahl hergestellt werden soll? (Resultate auf kg runden)

weiterfahren

	A	B	C	D
Eisen	70%	74%	78%	0%
Chrom	22%	18%	15%	0%
Nickel	8%	8%	7%	100%

$$\left|\begin{array}{lllll} 70x_1 & +74x_2 & +78x_3 & & = 72 \\ 22x_1 & +18x_2 & +15x_3 & & = 18 \\ 8x_1 & +8x_2 & +7x_3 & +100x_4 & = 10 \end{array}\right|$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{147}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{333}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -92 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_4 = t$

$x_3 = -2 + 92t = 2(46t - 1)$

$x_2 = \frac{9}{2}(1 - 37t)$

$x_1 = \frac{1}{2}(147t - 3) = \frac{3}{2}(49t - 1)$

Da die Lösungen nicht negativ sein dürfen, muss $t = x_4 \geq \frac{1}{46}$ sein. Da auch x_1 und x_2 für diesen Wert von t positiv sind, ist die Lösung $\left(\frac{9}{92}, \frac{81}{92}, 0, \frac{1}{46}\right)$
Es müssen also zu 22 kg Nickel 98 kg der Sorte A und 880 kg der Sorte B beigefügt werden.

3.3 Fluss in Netzen

Aufgabe:
Die Abbildung zeigt schematisch den Verkehrsfluss auf vier Einbahnstrassen einer Stadt. Die Zahlen sind Schätzungen für die Anzahl der pro Stunde erwarteten Autos. Mit diesen können Verkehrsdichten x_1, x_2, x_3 und x_4 ermittelt werden. Welches ist der kleinstmögliche Verkehrsfluss zwischen P und Q?

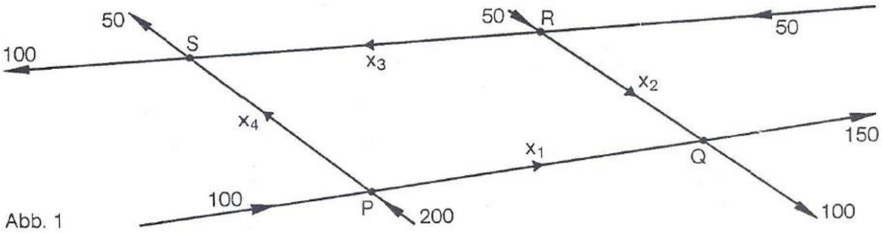


Abb. 1

Wenn an einer Kreuzung kein Stau entstehen soll, dann muss der ankommende Verkehr gleich dem abfliessenden Verkehr sein. Die führt an den Kreuzungen zu folgenden Gleichungen:

Kreuzung P:	$x_1 + x_4 = 300$
Kreuzung Q:	$x_1 + x_2 = 250$
Kreuzung R:	$x_2 + x_3 = 100$
Kreuzung S:	$x_3 + x_4 = 150$

Die zugehörige erweiterte Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 250 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \end{bmatrix} \text{ hat die Zeilenstufenform } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -50 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die allgemeine Lösung lautet somit

$x_4 = t$
$x_3 = 150 - t$
$x_2 = t - 50$
$x_1 = 300 - t$

Da es sich um Einbahnstrassen handelt müssen die Lösungen nicht negativ sein, d.h. es muss gelten:

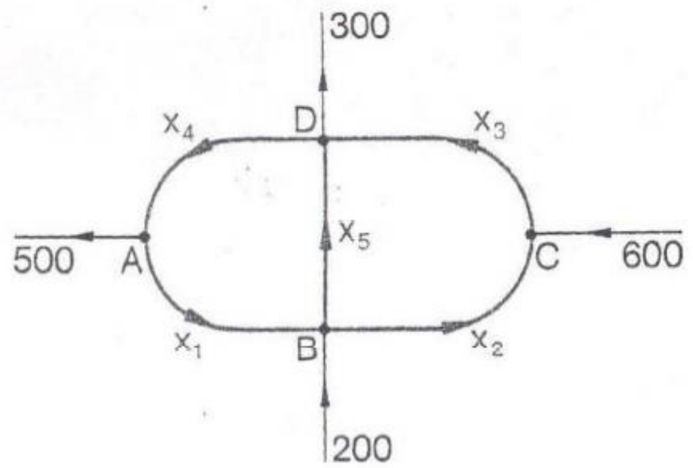
$50 \le x_4 \le 150$

Wählt man $x_4 = 150$ so ergibt sich als minimaler Verkehrsfluss zwischen den Kreuzungen P und Q der Wert

$x_1 = 300 - x_4 = 150.$

Übungsaufgabe:
Es ist für das abgebildete Einbahnstrassennetz ein Gleichungssystem aufzustellen.

a) wie heisst die allgemeine Lösung?
b) Welche Bedingung muss x_4 erfüllen, damit bei A kein Stau entsteht?
c) Wie könnte z.B. eine spezielle Lösung des Problems heissen?



Lösung:

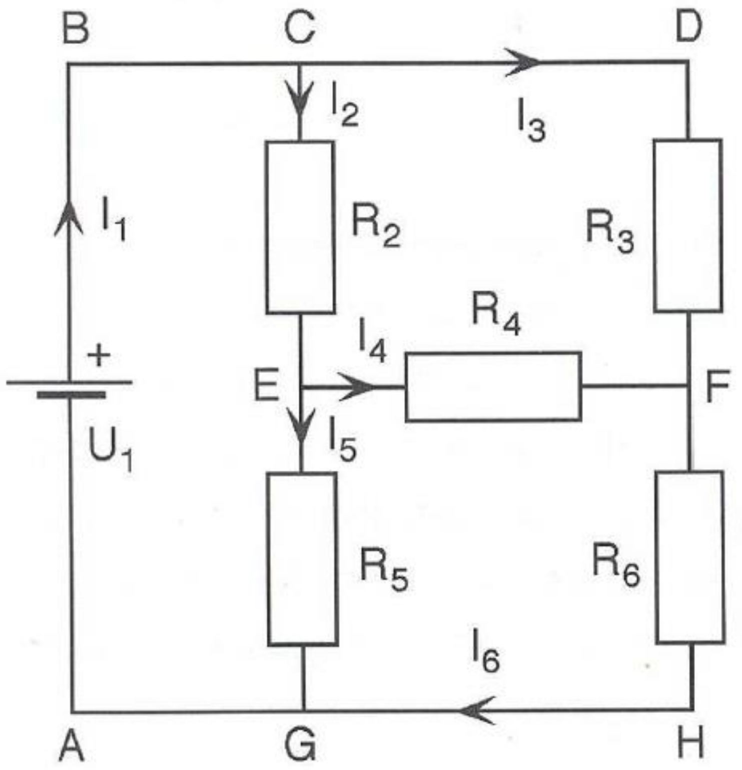
Kreuzung A: $-x_1 + x_4 = 500$
Kreuzung B: $-x_1 + x_2 + x_5 = 200$
Kreuzung C: $-x_2 + x_3 = 600$
Kreuzung D: $x_3 - x_4 + x_5 = 300$

a)
$x_5 = t$
$x_4 = s$
$x_3 = 300 + s - t = 300 + x_4 - x_5$
$x_2 = -300 + x_4 - x_5$
$x_1 = -500 + x_4$

b) $x_4 \geq 500$

c) z.B. $x_1 = 50, x_2 = 100, x_3 = 700, x_4 = 550, x_5 = 150$

3.4. Elektrische Netzwerke



Aufgabe:
Gegeben ist ein aus idealen Leitern bestehendes elektrisches Netzwerk mit einer Batterie (Spannung U_1) und fünf Widerständen mit den Werten R_2 , R_3, …., R_6. Es gelten die folgenden Kirchhoffschen Gesetze:
1. Knotenregel:
an jedem Knoten (Verzweigung) ist die Summe der hinein fliessenden Ströme gleich der Summe der hinaus fliessenden Ströme.
2. Maschenregel:
Entlang eines geschlossenen Weges im Netzwerk (Masche) muss die Summe der Potenzialänderungen verschwinden. Eine Analogie dazu:
Kehrt man bei einer Bergwanderung zum Ausgangspunkt zurück, dann muss die Summe der zurückgelegten Höhenunterschiede Null sein.
Beim Pluspol einer Batterie ist das elektrische Potential um die Batteriespannung höher als beim Minuspol. Die Potentiale vor und nach einem Widerstand unterscheiden sich um $\pm$ RI. Da der elektrische Strom stets vom höheren zum tieferen Potential fliesst, ist die Potentialänderung –RI negativ, wenn der Weg in Stromrichtung (abwärts) durch einen Widerstand führt, sonst positiv.

Bemerkung zu 1.
Da es nicht immer möglich ist, die Richtung des Stroms anzugeben, kann man diese zunächst willkürlich festlegen. Ergibt dann die Rechnung einen negativen Wert, dann kann die Richtung nachträglich korrigiert werden.

Beispiel:
$R_2 = 24\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 6\Omega$, $R_5 = 2\Omega$, $R_6 = 9\Omega$, $U_1 = 30V$

Für die dargestellte Schaltung ergeben sich damit die folgenden Knoten- bzw. Maschengleichungen:

Knoten F: $I_6 = I_3 + I_4$
Knoten E $I_2 = I_4 + I_5$
Knoten C: $I_1 = I_2 + I_3$
Masche CDFEC: $3I_3 - 6I_4 - 24I_2 = 0$
Masche ABCG: $24I_2 + 2I_5 = 30$
Masche ABCDFHGA: $3I_3 + 9I_6 = 30$

Ordnet man die Gleichungen nach den Unbekannten, so erhält man folgende erweiterte Matrix

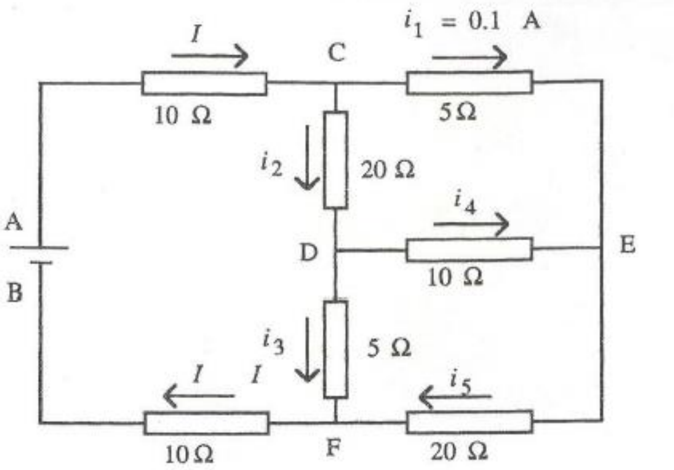
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 3 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & 2 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 9 & 30 \end{bmatrix}$$

Sie lässt sich mit dem Gauss-Jordan-Algorithmus umformen zu

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Daraus ergeben sich die Lösungen:
$I_1 = 5\text{A}$ $I_2 = 1\text{A}$ $I_3 = 4\text{A}$ $I_4 = -2\text{A}$ $I_5 = 3\text{A}$ $I_6 = 2\text{A}$
Das Minuszeichen für I_4 bedeutet, dass die Stromrichtung in entgegengesetzter Richtung einzuzeichnen ist.

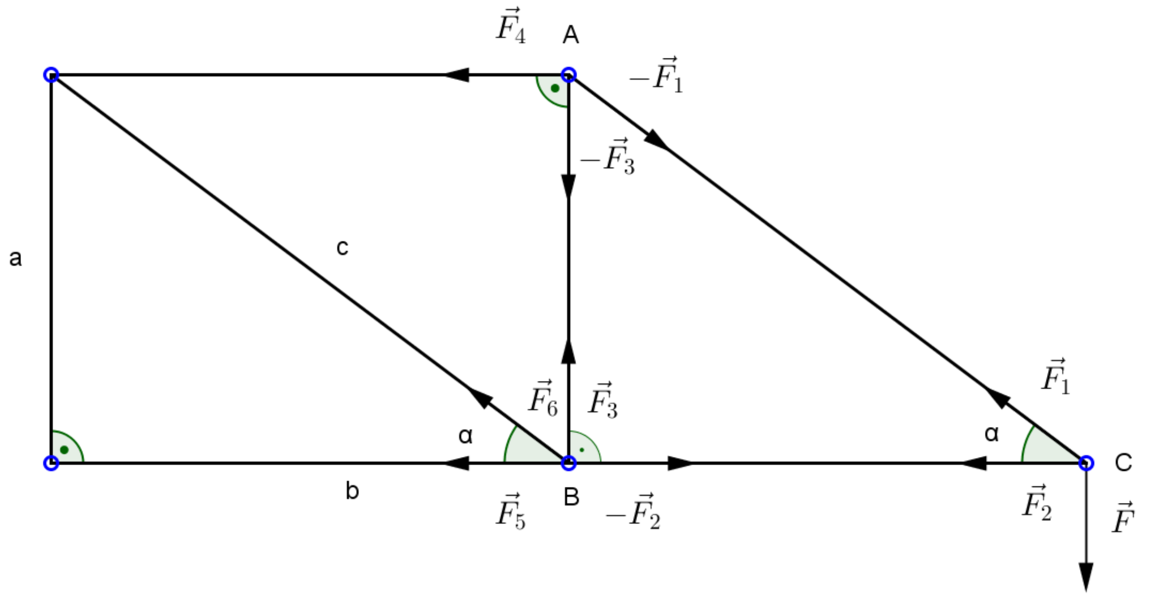
Übungsaufgabe:
Aus den folgenden Angaben in der Abbildung ist die Spannung U_{AB} zu bestimmen.



	I	i_2	i_3	i_4	i_5	
Knoten C:	-1	1	0	0	0	-0.1
Knoten D:	0	-1	1	1	0	0
Knoten E:	0	0	0	-1	1	0.1
Knoten F:	1	0	-1	0	-1	0
Masche CEDC	0	-20	0	-10	0	-0.5
Masche DEFD	0	0	-5	10	20	0

Lösung:
I = 0.15A, $i_2 = 0.05\text{A}$ $i_3 = 0.10\text{A}$ $i_4 = -0.05\text{A}$ $i_5 = 0.05\text{A}$
Für die Spannung ergibt sich daraus:
$U_{AB} = U_{AC} + U_{CD} + U_{DF} + U_{FB} = 10 \cdot \mathrm{I} + 20 \cdot \mathrm{i}_2 + 5 \cdot \mathrm{i}_3 + 10 \cdot \mathrm{I} = 4.5\ \mathrm{V}$

4. Statik (Quelle: Bey)
Aufgabe:
Der abgebildete (vereinfachte) Kranausleger besteht aus drei rechtwinkligen Dreiecken mit den Katheten a = 3m und b = 4m. Dieses Tragwerk besteht aus Stahlrohren, deren Eigengewicht vernachlässig t wird. Welche Kräfte wirken auf die sechs Rohre, wenn die Belastung $\left|\vec{F}\right| = F = 60'000N$ beträgt?



Der Betrag des Vektors $\vec{F_i}$ wird im Folgenden mit x_i mit i = 1, …6 abgekürzt.
In einem rechtwinkligen Koordinatensystem erhalten die Kraftvektoren die folgenden Komponenten:

$$\vec{F} = F \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{F_1} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(180° - \alpha) \\ \sin(180° - \alpha) \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{F_2} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos 180° \\ \sin 180° \end{pmatrix} = x_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{F_3} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} \cos 90° \\ \sin 90° \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{F_4} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} \cos 180° \\ \sin 180° \end{pmatrix} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{F_5} = x_5 \cdot \begin{pmatrix} \cos 180° \\ \sin 180° \end{pmatrix} = x_5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{F_6} = x_6 \cdot \begin{pmatrix} \cos(180° - \alpha) \\ \sin(180° - \alpha) \end{pmatrix} = x_6 \cdot \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = x_6 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

In den drei Knoten gelten die folgenden Gleichungen:
Knoten C:

$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \vec{F} = \vec{0}$ in Komponenten
$$\begin{aligned} -\tfrac{4}{5}x_1 - x_2 &= 0 \\ \tfrac{3}{5}x_1 &= F \end{aligned}$$

Knoten A:

$-\overrightarrow{F_1} - \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = \vec{0}$ in Komponenten
$$\begin{aligned} \tfrac{4}{5}x_1 - x_4 &= 0 \\ -\tfrac{3}{5}x_1 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Knoten B:

$-\overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_5} + \overrightarrow{F_6} = \vec{0}$ in Komponenten
$$\begin{aligned} x_2 - x_5 - \tfrac{4}{5}x_6 &= 0 \\ x_3 + \tfrac{3}{5}x_6 &= 0 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem hat die erweiterte Matrix

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

mit der Lösung

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3}F \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3}F \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -F \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3}F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3}F \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3}F \end{bmatrix}$$

Die Kräfte an den sechs Rohren haben damit die folgenden Beträge:

$F_1 = F_6 = \frac{5}{3}F$ = 100‘000 N
$F_2 = F_4 = \frac{4}{3} \;=\; 80'000\ N$
$F_3 = F$ = 60‘000 N
$F_5 = -\frac{8}{3}F$ = 160‘000 N