9. Der Fundamentalsatz der Algebra

Unter einer Polynomfunktion n-ten Grades mit reellen oder komplexen Koeffizienten versteht man eine Funktion f mit der Gleichung
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

Die Aufgabe, die Nullstellen eines Polynoms n-ten Grades zu bestimmen, führt auf eine sogenannte algebraische Gleichung n-ten Grades.

Der Fundamentalsatz der Algebra macht eine Aussage über die Anzahl der Nullstellen eines Polynoms

Fundamentalsatz der Algebra
In C zerfällt jedes Polynom n-ten Grades in genau n Linearfaktoren d.h. es gilt:
$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)....(x - x_n)$

Aus diesem Grund sagt man, der Körper der komplexen Zahlen **C** ist algebraisch abgeschlossen, dies im Gegensatz zum Körper der reellen Zahlen R. In R hat etwa schon das einfache Polynom $f(x) = x^2 + 1$ hat keine reelle Nullstelle.

Bemerkungen:
Die Linearfaktoren müssen nicht notwendigerweise verschieden sein.
Der Satz sagt aus, dass ein Polynom bis auf einen konstanten Faktor durch seine Nullstellen bestimmt ist.

Spezialfall:
Sind insbesondere alle Koeffizienten reell, dann ist mit jeder komplexen Zahl auch die konjugiert komplexe Zahl eine Nullstelle, d.h. komplexe Nullstellen treten paarweise auf.

Beispiele:
$f(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4$ Polynom 3. Grades
Aus der Zerlegung
$f(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4 = z^2(z-1) + 4(z-1) = (z-1)(z^2+4) = 0$
ergeben sich die Nullstellen zu $z_1 = 1$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2i$ und schliesslich die Zerlegung in Linearfaktoren
$f(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4 = (z-1)(z-2i)(z+2i)$

Übungsaufgabe:
Bestimme die Nullstellen des Polynoms $f(z) = z^3 - 4z^2 + 6z$

Lösung:
$f(z) = z^3 - 4z^2 + 6z = z(z^2 - 4z + 6)$ Nullstellen: $z_1 = 0$, $z_{2,3} = 2 \pm i\sqrt{2}$