3. Darstellung von komplexen Zahlen in der Polarform

Die folgende Darstellung einer komplexen Zahl in der sogenannten Polarform führt auf eine einfache geometrische Interpretation der Multiplikation komplexer Zahlen.

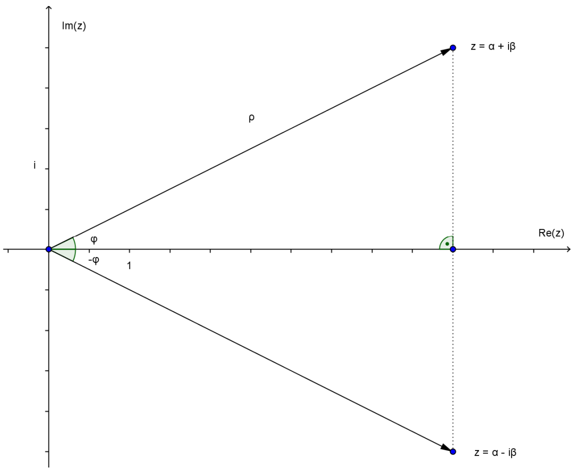
Es bezeichne
$\rho = |z|$ und $\varphi = \arg z$ (Argument von z)

Dann gilt:
$z = \alpha + i\beta = \rho \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$
wobei $0 \leq \varphi < 2\pi$

arg(0) kann frei gewählt werden.

Zur Abkürzung wird dafür geschrieben:
$z = \rho \cdot \text{cis}\,\varphi$ (später $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$).

Für die zu z konjugiert komplexe Zahl $\bar{z}$ gilt dann:
$\bar{z} = \alpha + i\beta = \rho \cdot cis\,(-\varphi)$



Es gelten die folgenden

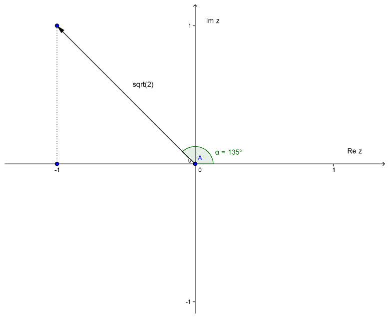
Umrechnungsformeln:

Polarform $\rightarrow$ Normalform

Re z = ρ cos φ
Im z = ρ sin φ

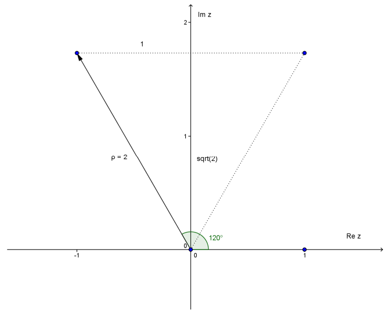
Beispiel:
$z = \sqrt{8} cis\ 135° = \sqrt{8} \cdot (\cos 135° + i \sin 135°) = -2 + 2i$

Normalform $\rightarrow$ Polarform



Beispiele zur Vorbereitung:
3 = 3 cis 0°   i = cis 90° $-\sqrt{5} = \sqrt{5}$ cis π
$-1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}$ cis 135 °
(halbes Quadrat)

$-1 + \sqrt{3}\mathrm{i} = 2\,\mathrm{cis}\,120°$
(halbes gleichseitiges Dreieck)



Allgemein:
z = α + iβ ≠ 0 $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
Das Argument φ ist so zu bestimmen, dass gilt:
$\sin\varphi = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$ und $\cos\varphi = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$
Variante:
Falls Re (z) ≠ 0 $\tan\varphi = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}$
wobei in diesem Fall abzuklären ist, in welchem Quadranten z liegt.

z = 3 - 4i = 5 cis 306.9° (4. Quadrant)
z = -3i = 3 cis 270°

4. Multiplikation komplexer Zahlen in der Polarform

$$z_1 = \rho_1 \cdot cis\varphi_1$$
$$z_2 = \rho_2 \cdot cis\varphi_2$$
$$z_1 \cdot z_2 = (\rho_1 \cdot cis\varphi_1)\cdot(\rho_2 \cdot cis\varphi_2) = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot (cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot(cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \left((cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)\right)$$

Mit den Additionstheoremen für sin und cos ergibt sich schliesslich:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot cis(\varphi_1 + \varphi_2)$$

das heisst:

Komplexe Zahlen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Argumente addiert.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \text{ und } \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Die Multiplikation einer komplexen Zahl mit ρ cis φ bedeutet also geometrisch eine Drehstreckung mit dem Faktor ρ und dem Drehwinkel φ.

Beispiele:
(3 + 3i) (5$\sqrt{2}$ cis 135°) = (3 $\sqrt{2}$ cis 45°)·(5$\sqrt{2}$ cis 135°) = 30 cis 180° = -30

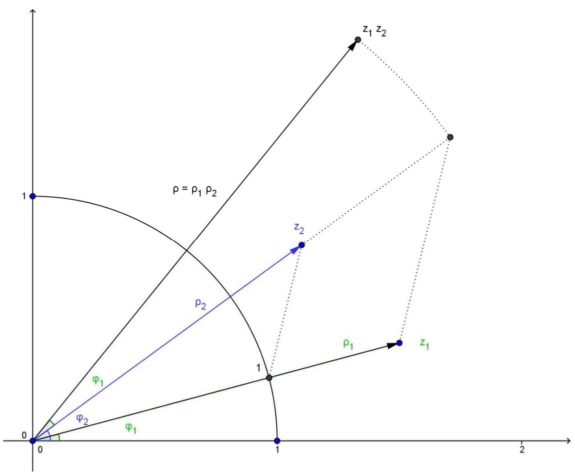
$$z_1 = 1 + i = \sqrt{2}cis45° \quad z_2 = \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) = cis\ 60°$$

Wegen $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}\, cis\, 105°$ erhält man durch Multiplikation in der Normalform den genauen Wert für $\sin 105° = \dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$ und analog cos 105°

Das Produkt zweier komplexer Zahlen kann geometrisch ermittelt werden. Dazu betrachtet man ähnliche Dreiecke:

Beispiel:
z_1 = 1.5 + 0.4i = 1.55 cis 14.9°
z_2 = 1.1 + 0.8i = 1.36 cis 36.0°
z_1z_2 = 2.11 cis 50.9°

Der absolute Betrag ρ des Produkts ρ = $\rho_1 \cdot \rho_2$ kann als Verhältnisgleichung geschrieben werden: $\dfrac{\rho}{\rho_2} = \dfrac{\rho_1}{1}$



Multipliziert man insbesondere eine komplexe Zahl mit cis φ, so bedeutet dies eine Drehung mit Zentrum O um den Winkel φ. Damit können die Abbildungsgleichungen einer Drehung um den Nullpunkt leicht hergeleitet werden.

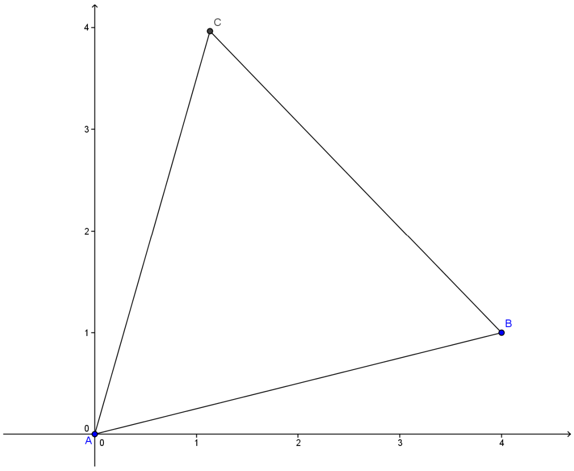
Drehung des Punktes P(z = x + iy) um den Nullpunkt

$(x + iy)\,\text{cis}\,\varphi = (x + iy)(\cos\varphi + i \sin\varphi) = (x \cos\varphi - y \sin\varphi) + i(x \sin\varphi + y \cos\varphi)$

Kontrolle: die Bilder der Basisvektoren stehen aufeinander senkrecht (Skalarprodukt!). Damit heissen die Abbildungsgleichungen:

$x' = x \cos\varphi - y \sin\varphi$
$y' = x \sin\varphi + y \cos\varphi$

Aufgabe:
Das Dreieck ABC ist gleichseitig. Bestimme die dritte Ecke C in den folgenden Fällen:
a) A(0), B(4 + i) C
b) A(2 + i), B(4 + 5i)



a)
C geht aus B durch eine 60°-Drehung um den Nullpunkt hervor.

$$z_C = z_B \cdot cis\,60° = z_B \cdot (cos\,60° + i \sin 60°)$$
$$= (4+i)\cdot\left(\tfrac{1}{2} + i\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 2 - \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3} + i\cdot\left(\tfrac{1}{2} + 2\cdot\sqrt{3}\right) \approx 1.13 + 3.96i$$

b)
Tipp: Der Vektor AC geht aus dem Vektor AB durch eine 60° Drehung hervor.

Übungsaufgabe:
Berechne z so, dass das Dreieck A(1), B(z) C(z^2) rechtwinklig-gleichschenklig mit rechtem Winkel bei A ist.

Insbesondere bedeutet die Multiplikation mit i eine 90°-Drehung im Gegenuhrzeigersinn.

Eine schöne Anwendung dazu ist die folgende Denksportaufgabe des Physikers Gamov (Spektrum 10.1979)

Eine alte Urkunde berichtet von einem Piratenschatz, der auf einer verlassenen Insel vergraben wurde und erklärt, wie man den Schatz wiederfinden kann. Auf der Insel stehen nur zwei Bäume, A und B, und die Reste eines Galgens. Man gehe vom Galgen auf geradem Wege zum Baum A und zähle dabei die Schritte. Bei A wende man sich um neunzig Grad nach links, gehe nochmals die gleiche Schrittzahl geradeaus und markiere die erreichte Stelle mit einem Stock. Dann begebe man sich zurück zum Galgen, gehe auf geradem Weg zum Baum B, zähle wieder die Schritte, wende sich bei B um neunzig Grad nach rechts und gehe die gleiche Schrittzahl geradeaus. Die erreichte Stelle werde wieder mit einem Stock markiert. Wenn man dann genau in der Mitte zwischen den beiden Stöcken gräbt, so wird man auf den Schatz stossen.
Ein junger Abenteurer, der die Urkunde fand, mietete sich ein Schiff und segelte zur Insel. Er hatte keine Mühe, die Bäume zu finden, aber zu seinem Jammer war der Galgen verschwunden, und die Zeit hatte alle Spuren verwischt, so dass die Stelle , an der sich der Galgen befunden hatte, nicht mehr zu erkennen war. Der junge Mann war ratlos und kehrte mit leeren Händen zurück. Nach Gamow hätte er den Schatz mit Leichtigkeit finden können.

AG 90° im Uhrzeigersinn um A drehen

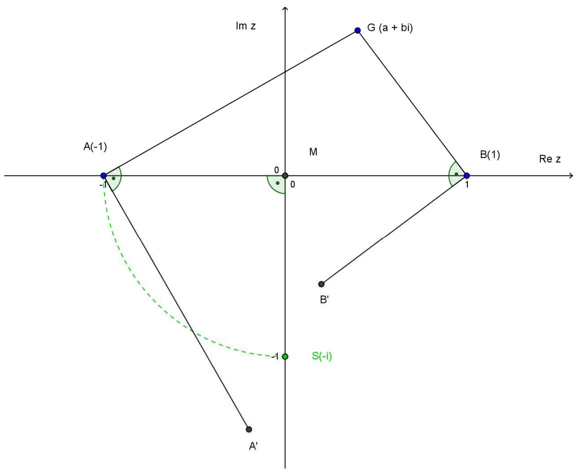
$$z_{A'} = z_A - i \cdot (z_G - z_A)$$

BG 90° im Gegenuhrzeigersinn um B drehen

$$z_{B'} = z_B + i \cdot (z_G - z_B)$$

$$z_S = \tfrac{1}{2}(z_{A'} + z_{B'}) = \tfrac{1}{2}(z_A + z_B + i(z_A - z_B))$$

$$= \tfrac{1}{2}(1 + (-1) - 2i) = -i$$



Lösung:
Drehe A um 90° im Gegenuhrzeigersinn
um die Mitte M von AB.