

Spezielle Verteilungen:

a) Gleichverteilung

Idealer Würfel:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 = \frac{7}{2}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{1}{6} \cdot \left(\left(1 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{7}{2}\right)^2 + \dots + \left(6 - \frac{7}{2}\right)^2 \right) = \frac{35}{12} \quad \sigma = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1.72$$

Allgemein:

Sind n gleichwahrscheinliche Ergebnisse 1, 2, 3, n möglich, dann gilt:

$\mu = \frac{1}{2} \cdot (n + 1) \text{ und } \sigma^2 = V(X) = \frac{1}{12} \cdot (n^2 - 1)$	Gleichverteilung
---	-------------------------

Beweis: Übungsaufgabe

Tipp: Verschiebungssatz (5) und die Formel für die Summe der Quadratzahlen verwenden.

b) Binomialverteilung

Die Binomialverteilung (Ziehen mit Zurücklegen) wurde bereits zusammen mit der hypergeometrischen Verteilung (Lottoformel, Ziehen ohne Zurücklegen) im Kapitel Wahrscheinlichkeitsrechnung eingeführt.

Die **binomialverteilte Zufallsvariable** X hat die Verteilung

$$P_n(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Für den Erwartungswert und die Varianz gilt:

$$(6) E(X) = np$$

$$(7) \sigma^2 = V(X) = npq \quad \text{Binomialverteilung}$$

Das Ergebnis für den Erwartungswert ist plausibel: Jeder der n Teilversuche hat die Erfolgswahrscheinlichkeit p ; beim Gesamtversuch sind daher im Mittel $n \cdot p$ Erfolge zu erwarten.

Beispiel 1:

Da die zum Münzenexperiment gehörige Zufallsvariable X binomialverteilt ist, erhält man wegen $n = 3$, $p = q = \frac{1}{2}$ direkt $E(X) = \frac{3}{2}$ und $V(X) = \frac{3}{4}$

Beweis von (6) und (7)

Nach Definition oder mit der folgenden passend gewählten Hilfsfunktion:

$$f(t) = (q + pt)^n = \sum_{x=0}^n P_n(x) t^x \quad \text{Binomischer Lehrsatz}$$

$$f'(t) = n(q + pt)^{n-1} \cdot p = \sum_{x=0}^n x \cdot P_n(x) t^{x-1} \quad \text{mit } t = 1$$

$$f'(1) = n \cdot p = \sum_{x=0}^n x \cdot P_n(x) = E(X) = \mu \quad (6)$$

$$f''(t) = n \cdot (n-1)(q + pt)^{n-2} \cdot p^2 = \sum_{x=0}^n x \cdot (x-1) P_n(x) t^{x-2}$$

$$f''(1) = n \cdot (n-1) \cdot p^2$$

$$n^2 p^2 - np^2 = \mu^2 - p\mu = E(X^2) - \mu \quad \text{nach } E(X^2) \text{ aufgelöst}$$

$$\mu^2 + \mu(1-p) = E(X^2) \quad \text{wegen } 1-p = q$$

$$E(X^2) = \mu^2 + npq$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = \mu^2 + npq - \mu^2 = npq \quad (7)$$

Ein eleganter Beweis ergibt sich auch, indem man die Zufallsvariablen X_i (Erfolg an der i-ten Stelle) einführt.

Wegen

$$E(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p \text{ und}$$

$$V(X_i) = q \cdot (0 - p)^2 + p \cdot (1 - p)^2 = q \cdot (0 - p)^2 + p \cdot q^2 = pq \cdot (p + 1 - p) = pq$$

gilt nach den Eigenschaften (2) und (4):

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = np \text{ bzw. } V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = npq$$

Übungsaufgaben:

a)

Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der Mädchen in einer Familie mit fünf Kindern. Die Wahrscheinlichkeit für eine Mädchengeburt nehmen wir als 0.5 an (ein genauerer Wert wäre 0.486). Berechne $E(X)$ und $V(X)$ nach Definition und mit (6) bzw. (7)

Lösung:

$$E(X) = 2.5, V(X) = 1.25$$

b)

Eine Laplacemünze mit den Seiten 0 und 1 wird so lange geworfen, bis eine Eins oder drei Nullen erscheinen. Es bezeichne X die Anzahl der Würfe. Berechne $E(X)$ und $V(X)$.

Lösung:

Tipp: Baumdiagramm

$$E(X) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{11}{16}$$

c) Die geometrische Verteilung

Ein Zufallsexperiment mit den Ergebnissen Erfolg und Fehlschlag wird wiederholt, bis erstmals ein Erfolg eintritt. Die Zufallsvariable X gibt die erforderliche Anzahl der Wiederholungen an.

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X gilt dann:

$$p_k = P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p \quad k = 1, 2, \dots \quad \text{Geometrische Verteilung}$$

Es ist zu zeigen, dass die nichtabbrechende Summe der Wahrscheinlichkeiten gleich 1 ist:

Für die Summe der n ersten Wahrscheinlichkeiten ergibt sich mit $q = 1 - p$

$$\sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1} \cdot p = p \sum_{k=1}^{n+1} q^{k-1} = p \cdot \sum_{i=0}^n q^i$$

Wegen $0 \leq q < 1$ konvergiert die geometrische Reihe und es gilt:

$$p \cdot \sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{p}{1 - q} = \frac{p}{p} = 1$$

Für den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$ gilt:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

und

$$V(x) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p}$$

Beweise finden sich in Wikipedia: Geometrische Verteilung

Hinweis:

Herleitung von Erwartungswert und Varianz mit der Momenten erzeugenden Funktion

Anwendungen:

Lebensdauer von Geräten

Bestimmung von Risiken in der Versicherungsmathematik

d) Die Poisson Verteilung (S. D. Poisson (1781-1840))

Die Poisson Verteilung kann als Grenzfall der Binomialverteilung hergeleitet werden. Oft ist wie etwa beim radioaktiven Zerfall in einem kleinen Zeitintervall die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses sehr klein, die Anzahl der Wiederholungen n sehr gross, aber das Produkt $\lambda = n \cdot p$ konstant.

Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung heisst Poisson Verteilung:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \text{ mit dem Erwartungswert } E(X) = V(X) = \lambda$$

Die Varianz der Binomialverteilung $V(x) = np(1 - p)$ kann wegen $\lambda = np$ und $p = \frac{\lambda}{n}$ in der Form geschrieben werden:

$$V(x) = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)$$

daraus ergibt sich mit n gegen ∞ die Varianz $V(X) = \lambda$

In der Literatur wird häufig das folgende Beispiel zitiert:

(Bortkiewicz 1893)

Anzahl der Kavalleristen der preussischen Armee, die durch Hufschlag getötet wurden. Dazu wurden in 10 Kavalleriekorpsteilen während 20 Jahren die folgenden Zahlen ermittelt:

Anzahl k der Getöteten	Anzahl der Jahre pro Korps und pro Dienstjahr
0	109
1	65
2	22
3	3
4	1
Summe	200

Der Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{200} \cdot (0 \cdot 109 + 1 \cdot 65 + 2 \cdot 22 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1) = 0.61$

wird als Schätzwert für das unbekannte λ verwendet

(→ Schätzen von Parametern im Abschnitt beurteilende Statistik)

Anzahl k der Getöteten	Anzahl der Truppenteiljahre		Tote insgesamt	Anzahl der Truppenteiljahre		Wahrscheinlichkeit
	beobachtet	Häufigkeit		erwartet	beobachtet	
0	109	0.545	0	109	109	0.543
1	65	0.325	65	66	65	0.331
2	22	0.11	44	20	22	0.101
3	3	0.015	9	4	3	0.021
4	1	0.005	4	1	1	0.003
Summe	200	1.000	122	200	200	1.000
		$\lambda =$	0.61			
		$\exp(-\lambda) =$	0.543			

Die Übereinstimmung ist verblüffend.

Radioaktiver Zerfall

Rutherford beobachtete 1920 eine radioaktive Substanz während $n = 2608$ Zeitintervallen von 7.5 Sekunden Dauer. In jedem Zeitintervall wurden die Teilchen gezählt, die ein Zählrohr erreichten. Es wurden insgesamt 10'086 Teilchen beobachtet, also im Mittel 3.870 pro Zählintervall. In der folgenden Tabelle sind die Zahl $z(k)$ der Zeitintervalle mit k beobachteten Teilchen und die theoretischen Werte $n \cdot P(X = k)$ angegeben.

Zerfall einer radioaktiven Substanz (Rutherford und Geiger 1920)

i	n_i	r_i	$P(X = i)$	n_i nach Poisson
0	57	2.186%	2.083%	54
1	203	7.784%	8.063%	210
2	383	14.686%	15.608%	407
3	525	20.130%	20.142%	525
4	532	20.399%	19.496%	508
5	408	15.644%	15.096%	394
6	273	10.468%	9.741%	254
7	139	5.330%	5.387%	141
8	45	1.725%	2.607%	68
9	27	1.035%	1.122%	29
10	10	0.383%	0.434%	11
11	4	0.153%	0.153%	4
12	0	0.000%	0.049%	1
13	1	0.038%	0.015%	0
14	1	0.038%	0.004%	0

Anzahl				
Zeitintervalle	2608	100.00%	1	2608
Zerfälle	Summe	10097		
pro Zeitintervall	λ	3.8715		
	$\exp(-\lambda)$	0.020826083		

Weitere Anwendungen für die Poissonverteilung:

Die Poissonverteilung spielt bei Modellen in der Versicherungsmathematik eine wichtige Rolle.

Anzahl der ankommenden Anrufe in einer Telefonauskunft

Anzahl Druckfehler pro Seite eines Buches

Verkehrszählung

Die Poissonverteilung kann auch zur

Approximation der Binomialverteilung für $p \ll 1$ (seltene Ereignisse) verwendet werden.