Kombinatorik

1. Einleitung

Die Kombinatorik ist ein Teilgebiet der finiten (endlichen, diskreten) Mathematik. Sie beschäftigt sich u.a. mit folgenden Problemen:

Abzählprobleme:
Gesucht ist die Anzahl der Möglichkeiten, gegebene Elemente nach bestimmten Bedingungen auszuwählen, anzuordnen (Anzahl Sitzordnungen, Zuteilung von Spielkarten, Zahlenlotto, Sudoku).

Optimierungsprobleme:
Kürzeste Wege (rasender Kaufmann, chinesischer Postmann), günstige Betriebsabläufe, Stundenpläne, Turnierpläne, Spielstrategien.

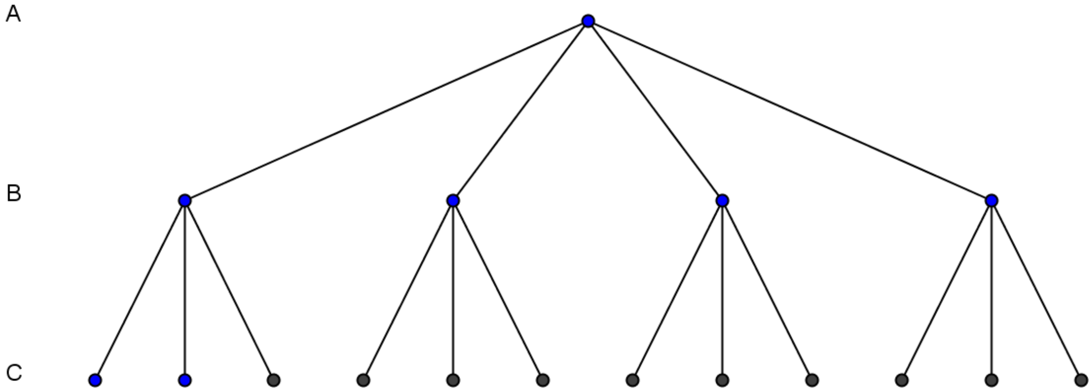
Existenzprobleme:
Vierfarbenproblem, Magische n-Ecke.

2. Produktregel

Einführendes Beispiel:
Wir nehmen an, dass von a-Dorf nach B-Dorf 4 Wege führen und von B-Dorf nach C-Dorf 3 Wege. Wieviele Wege führen dann von A-Dorf über B-Dorf nach C-Dorf?

Für jeden der n_1= 4 Wege von A-Dorf nach B-Dorf gibt es **je** n_2 = 3 Wege von B-Dorf nach C-Dorf.
Damit führen n_1 n_2 = 4·3 Wege von A-Dorf nach C-Dorf.

Veranschaulichung in einem Baumdiagramm:



Allgemein gilt:

Produktregel:
Kann ein 1. Teilproblem auf n_1 Arten, und anschliessend ein 2. Teilproblem auf n_2 Arten gelöst werden, dann gibt es $n_1 \cdot n_2$ Möglichkeiten das Gesamtproblem zu lösen.

Bem.:
Die Produktregel gilt auch für k Teilprobleme.

Formulierungsvariante:
Sind A und B zwei Mengen mit n_1 bzw. n_2 Elementen, dann hat die Menge aller Zahlenpaare d.h. das sogenannte kartesische Produkt A × B genau $n_1 \cdot n_2$ Elemente.

Beispiele:
Ein Fussballspiel endet 4:2. Wieviele Halbzeitresultate sind möglich?

1. Teilproblem: Wahl der Tore der Heimmannschaft: $n_1 = 5$ Möglichkeiten
2. Teilproblem: Wahl der Tore der Gastmannschaft: $n_2 = 3$ Möglichkeiten
Es gibt 5·3 mögliche Halbzeitresultate.

Menukarte: Ein Restaurant bietet Menüs in 3 Gängen an, die man nach freier Wahl aus 2 Vorspeisen, 4 Hauptgängen und 3 Desserts zusammenstellen kann.

Offensichtlich gibt es 2·4·3 = 24 verschiedene Menüs.

14 Spielerinnen nehmen an einem Schachturnier teil. Wie viele Partien für die 1. Runde sind mög1ich?

Für die erste Runde können 13·11·9·7·5·3 = 135135 verschiedene Partien gebildet werden.

Anzahl der Teiler einer gegebenen Zahl z.B. 2160.

Zerlege die Zahl in Primfaktoren. $z = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^1$.
Wahl des Exponenten von 2: $n_1 = 5$ Möglichkeiten (0 nicht vergessen)
Wahl des Exponenten von 3 : $n_2 = 4$ Möglichkeiten
Wahl des Exponenten von 5: $n_3 = 2$ Möglichkeiten insgesamt 5·4·2 = 40 Teiler.

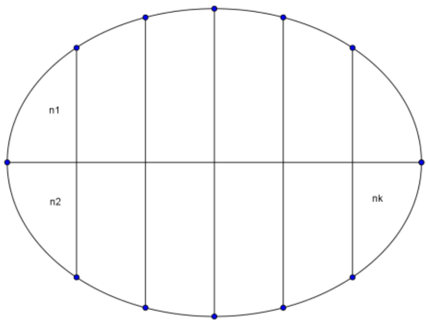
Satz:
Die Teilerzahl von z ist genau dann ungerade, wenn z eine Quadratzahl ist.

Beweis:
Ist z keine Quadratzahl, dann tritt mindestens ein ungerader Exponent auf, womit die Teilerzahl gerade ist. Ist z eine Quadratzahl, dann hat jeder Teiler ausser die Wurzel einen Komplementärteiler.

3. Summenregel

Einführendes Beispiel:
Um die Anzahl der SchülerInnen der KSZ zu bestimmen, kann man
a) die SchülerInnen einzeln zählen oder
b) die Bestände aller Klassen bestimmen.
Dies führt auf die sogenannte

Summenregel:
Hat man für eine Entscheidung k Alternativen, die sich gegenseitig ausschliessen und gibt es für die 1. Alternative n_1, die 2. n_2 ... die k-te Alternative n_k Möglichkeiten, dann kann man sich insgesamt auf $n_1 + n_2 + ... + n_k$ Arten entscheiden.



B:
Auf wieviele Arten kann man aus 5 Franzosen, 10 Engländern und 6 Deutschen 2 Personen verschiedener Nationalität ausgewählt werden.

1. Alternative: Franzose und Engländer: 5·10 Möglichkeiten
2. Alternative: Franzose und Deutscher: 5·6 Möglichkeiten
3. Alternative: Engländer und Deutscher: 10·6 Möglichkeiten

Also insgesamt 5·10 + 5·6 + 10·6 = 140

Wir besprechen im folgenden 5 Grundtypen von kombinatorischen Aufgaben:
Dabei spielen die folgenden Fragen eine Rolle:
- Wieviele Elemente sind vorhanden ?
- Wieviele Elemente werden ausgewählt (Umfang der Stichprobe) ?
- Darf ein Element mehrfach ausgewählt werden (Stichprobe mit oder ohne Zurücklegen) ?
- Spielt die Reihenfolge der Auswahl eine Rolle oder nicht (geordnete oder ungeordnete Stichprobe)?