6. ungeordnete k-Stichproben, Kombinationen, Binomialkoeffizienten

6.1 Kombinationen ohne Wiederholungen, ungeordnete k-Stichprobe ohne Zurücklegen

Aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln werden k Kugeln **mit einem Griff** gezogen. Wir sprechen von ungeordneten k-Stichproben ohne Zurücklegen bzw. Kombinationen von n Elementen zur k-ten Klasse. Die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten wird mit $\binom{n}{k}$ bezeichnet. Die Zahlen $\binom{n}{k}$ heissen (nomen est omen!) Binomialkoeffizienten.

Einführendes Beispiel:

Kombinationen von 5 Elementen zur 3. Klasse
ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE
BCD, BCE, BDE,
CDE
Ergebnis: $\binom{5}{3}$ = 10 Warum?

Jede der $\binom{5}{3}$ Kombinationen erzeugt 3! Wörter (Variationen): z.B. erzeugt ACE die Wörter ACE, AEC, CAE, CEA, EAC, ECA. Auf diese Art entstehen alle möglichen Wörter, also gilt:
$\binom{5}{3}\cdot 3! = 5\cdot 4\cdot 3$ und damit $\binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}\cdot\frac{2\cdot 1}{2\cdot 1} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}$
Variante:
Das Ergebnis kann auch durch Zurückführen auf Permutationen mit Wiederholungen hergeleitet werden:
ACE wird codiert durch 10101 (1: A wird ausgewählt, 0: B wird nicht ausgewählt, ...).
Damit gilt: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!}$

allgemein:

(5) $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Anzahl k-Stichproben ohne Zurücklegen bzw. Kombinationen von n Elementen zur k. Klasse

Beachte, dass im Zähler und Nenner je k Faktoren stehen.

Beispiele:

$$\binom{12}{3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Beim Zahlenlotto sind aus 45 Zahlen 6 auszuwählen. Es gibt also

$\binom{45}{6} = 8\,145\,060$ verschiedene Tipmöglichkeiten.

Beim Viererschieber erhält ein Spieler 9 von insgesamt 36 Karten. Dies ist auf

$\binom{36}{9} = 94\,143\,280$ Arten möglich.

Begrüssen sich 6 Personen,dann werden $\binom{6}{2} = 20$ mal die Hände gedrückt.

Spezialfälle:

$\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$

Die beiden folgenden Eigenschaften sind hin und wieder nützlich:

1. Symmetrieeigenschaft der Binomialkoeffizienten

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ k Elemente auswählen, heisst n - k Elemente nicht auswählen.

B: $\binom{100}{98} = \binom{100}{2}$

2. Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \qquad (*)$$

B: $\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3}$

Zur Vorbereitung des Beweises lösen wir folgende

Aufgabe:
Eine Klasse mit 14 (n + 1) Studierenden bildet eine Mannschaft zu 6 (k + 1) Studierenden.
Auf wieviele Arten ist dies möglich?

Aus 14 Studierenden können auf $\binom{14}{6}$ Arten 6 Studierende ausgewählt werden.

Bei $\binom{13}{5}$ Mannschaften ist eine bestimmte Person dabei, bei $\binom{13}{6}$ nicht, womit gilt:

$$\binom{14}{6} = \binom{13}{5} + \binom{13}{6}$$

1. Beweis von (*) durch kombinatorische Überlegungen

Aus n + 1 Elementen können k + 1 Elemente auf $\binom{n+1}{k+1}$ Arten ausgewählt werden.

Bei $\binom{n}{k}$ Auswahlen ist ein bestimmtes Element (das schwarze Schaf) dabei, bei $\binom{n}{k+1}$ nicht, woraus die Behauptung folgt.

2. Beweis von (*) durch Anwenden der Definition der Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}=\frac{n!\cdot(k+1)}{k!\cdot(n-k)!\cdot(k+1)}+\frac{n!\cdot(n-k)}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!\cdot(n-k)}$$
$$=\frac{n!\cdot(k+1+n-k)}{(k+1)!\cdot(n+1-(k+1))!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}=\binom{n+1}{k+1}$$

In den folgenden Beispielen kommen Fallunterscheidungen vor:

Auf einem Tennisplatz sind 7 Damen und 5 Herren. Wieviele Partien mit 2 Spielern sind möglich?

Gesamtzahl $\binom{12}{2}$ davon

$\binom{7}{2}$ (Dame gegen Dame) $\binom{7}{1}\binom{5}{1}$ (Dame gegen Herr)

$\binom{5}{2}$ (Herr gegen Herr) womit gilt: $\binom{12}{2}=\binom{7}{2}+\binom{7}{1}\binom{5}{1}+\binom{5}{2}$

Eine Gesellschaft von 8 Personen soll für eine Flussüberfahrt auf 3 Boote aufgeteilt werden. Das erste Boot fasst 1 Person, das zweite 3 und das dritte 4 Personen. Auf wieviele Arten kann man die Gesellschaft auf die 3 Boote verteilen, wenn zwei Personen darunter sind, die keinesfalls im gleichen Boot sitzen möchten ?

Von der Gesamtzahl der möglichen Fälle: $\binom{8}{1}\binom{7}{3}$ ist die Anzahl der verbotenen Fälle zu subtrahieren (beide verfeindete Personen sind im Boot B oder C).

Damit gilt für die Anzahl der erlaubten Zustände: $\binom{8}{1}\binom{7}{3}-6\left(5+\binom{5}{3}\right)=190$

Lösungsvariante: Betrachte alle erlaubten Zustände.

Aufgabe:
Aus n Frauen und n Männern soll ein n-köpfiger Ausschuss gewählt werden. Berechne auf zwei Arten die Anzahl der Möglichkeiten und beweise so die entsprechende Formel!

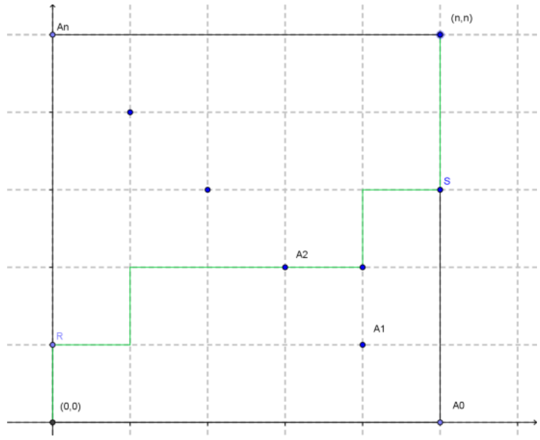
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

Die Gesamtzahl der möglichen Ausschüsse $\binom{2n}{n}$ ist gleich der Summe der Ausschüsse mit genau k Frauen. Dazu sind aus n Frauen k auszuwählen und aus n Herren genau n - k.

Dies geht auf $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}^2$ Arten.

Andere Einkleidung:

Berechne die Anzahl der Wege von (0,0) nach (n,n) auf zwei Arten:
a) direkt
b) durch Berechnung der Wege über
    $A_0, A_1, \ldots., A_n$
    und Addition dieser Zahlen.



Aufgabe:
Auf wie viele Arten können 2n Personen in n Zweiergruppen eingeteilt werden?

Das erste Paar kann auf $\binom{2n}{2}$ Arten ausgewählt werden, das zweite aus den verbleibenden 2n – 2 Personen auf $\binom{2n-2}{2}$ Arten, …., das letzte auf $\binom{2}{2}=1$ Art. Da es auf die Reihenfolge der Wahl der n Paare nicht ankommt ist das Produkt der Binomailkoeffizienten durch n! zu dividieren:

$$\frac{1}{n!}\cdot\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}=\frac{1}{n!}\cdot\frac{2n\cdot(2n-1)}{2}\cdot\frac{(2n-2)\cdot(2n-3)}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{4\cdot 3}{2}\cdot\frac{2\cdot 1}{2}=\frac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}$$

Uebungsaufgabe:
Welche der folgenden Binomialkoeffizienten sind durch 7 teilbar?

a) $\binom{200}{120}$ (ja) b) $\binom{1000}{200}$ (nein)