7. Binomischer Lehrsatz

Der binomische Lehrsatz macht eine Aussage über die Entwicklung von
$(a + b)^n \quad n = 0,1, ...$

Durch Ausmultiplizieren für verschiedene n erhält man:

$$
\begin{array}{ll}
(a+b)^0 & 1 \\
(a+b)^1 & a + b \\
(a+b)^2 & a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 & a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{array}
$$

Die Koeffizienten, die sogenannten Binomialkoeffizienten lassen sich im sogenannten Pascal'schen Dreieck anordnen. Das Schema wird von lauter Einsen berandet. Ein Koeffizient im Innern des Schemas ergibt sich als Summe der unmittelbar darüberliegenden Zahlen
(siehe Ziffer 6.1)

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Allg. gilt:

Binomischer Lehrsatz: $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$

Bemerkungen:
Die Summe der Exponenten von a und b ist in jedem Glied gleich n
Die Entwicklung von $(a + b)^n$ hat n + 1 Summanden.

Beweis dieses Satzes im Falle n = 5
$(a + b)^5 = (a + b)\,(a + b)\,(a + b)\,(a + b)\,(a + b)$

Es sind alle Produkte zu addieren, die aus je einem Summanden der 5 Klammern bestehen. Um etwa a^3b^2 zu erhalten, hat man in genau 3 der 5 Klammern a auszuwählen, dies kann auf $\binom{5}{3}$ Arten geschehen.

Beispiele:

Wie heisst der Koeffizient von $a^3 b^6$ in der Entwicklung von $(a + b)^9$?

Antwort: $\binom{9}{6}$

Berechne näherungsweise 1.008^4

$1.008^4 = (1+0.008)^4 \approx 1 + 4 \cdot 0.008 = 1.032$ TR-Wert: 1.032386052

Längenausdehnung eines Stabes: $l = l_0 \cdot (1 + \alpha \,\Delta T)$

Der Volumenzuwachs beträgt näherungsweise: $V = V_0 \cdot (1 + \alpha\,\Delta T)^3 \approx V_0 \cdot (1 + 3\alpha\,\Delta T)$

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

Anzahl der Teilmengen einer Menge von n Elementen

Beim Sporttoto gibt es bekanntlich 3^{13} Tipmöglichkeiten. Aus der Darstellung

$$3^{13} = (2+1)^{13} = \sum_{k=0}^{13} \binom{13}{k} 2^k$$

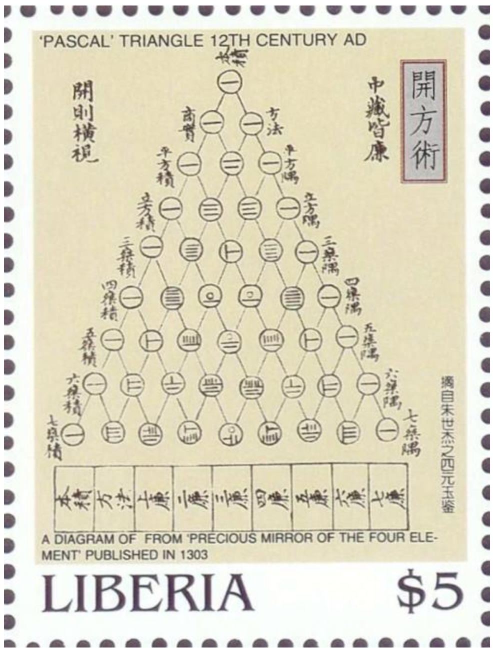
ergeben sich nach dem Binomischen Lehrsatz die Anzahl der k-er für k = 0,1,2,...., 13.

Uebungsaufgabe:

$(\sqrt{2} - 1)^6 = 99 - 70\sqrt{2}$

Geschichtliches:

Blaise Pascal (1623 - 1662) stellte sein Zahlendreieck in einer Arbeit vor ("Traité du Triangle Arithmetique"), die erst nach seinem Tode veröffentlicht wurde (1665). Jedoch erschien dieses Dreieck bereits in früheren Arbeiten, die Pascal vermutlich nicht bekannt waren, so etwa Chu Shih - Chieh's "Ssu Yuan Yii Chien" aus dem Jahre 1303.



Uebungsaufgabe:

Beim Ausdruck der Zahl 10002^5 sind nur die ersten 12 Ziffern lesbar, nämlich 100‘100‘040‘008’XXX’XXX’XXX. Wie heissen die letzten 9 Stellen der Zahl?