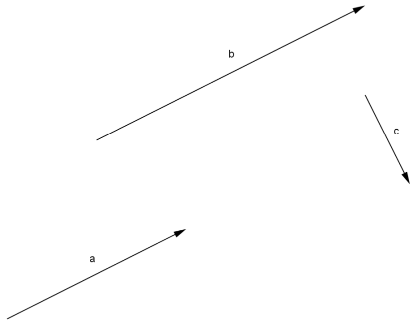
8. Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Der Begriff der linearen Abhängigkeit spielt in der Vektorrechnung (bzw. Linearen Algebra) eine wichtige Rolle. Zur Vorbereitung betrachten wir in der Grundebene oder im Raum zwei Vektoren, die zu einer Geraden parallel sind. Zwei Vektoren heissen in diesem Fall kollinear. Anders ausgedrückt ist $\vec{b}$ ein geeignetes Vielfaches von $\vec{a}$ d.h. es gilt:

$\vec{b} = \lambda\vec{a} \quad \lambda \in R$

Skizze: $\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a}$ oder $3\vec{a} - 2\vec{b} = \vec{0}$ (*)



Man sagt: die beiden Vektoren sind linear abhängig.

Im Gegensatz dazu ist der Vektor $\vec{c}$ zum Vektor $\vec{a}$ nicht kollinear, eine (*) entsprechende Gleichung kann nur in der folgenden trivialen Form aufgestellt werden:

$0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{c} = \vec{0}$.

Die beiden Vektoren sind in diesem Fall linear unabhängig.

Def.

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ heissen genau dann linear abhängig, wenn gilt: $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$, wobei λ bzw. μ nicht beide 0 sein dürfen, was sich in der Form $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ ausdrücken lässt.
Andernfalls heissen die Vektoren linear unabhängig.

Aufgabe (Grundebene):
Bestimme die fehlende Koordinate des Punktes C(x,9) so, dass C auf der Geraden g durch die Punkte A(5,-6) und B(-7,-3) liegt.

Liegt C auf g, dann sind die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AB}$, d.h. die beiden Vektoren sind linear abhängig, $\overrightarrow{AC}$ ist ein Vielfaches von $\overrightarrow{AB}$

(*) $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} \quad \lambda \in R$.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x-5 \\ 15 \end{pmatrix}$ in Komponenten: $\begin{matrix} x-5 = -12\lambda \\ 15 = 3\lambda \end{matrix}$

$\lambda = 5$ eingesetzt in die 2. Gleichung ergibt x = -55.

uebungsaufgabe (Raum):
Zeige, dass das Viereck A(2, 3, 4), B(8, 6, 1), C(9, 3, 1) D(5, 1, 3) ein Trapez ist.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{DC} = \tfrac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AB}$$

damit ist die Seite DC parallel zur Seite AB.

Darstellung eines Vektors c als Linearkombination zweier gegebener Vektoren a und b

Aufgabe (Grundebene):

Zerlege den Vektor $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ nach den linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

physikalische Interpretation der Aufgabe:
Zerlege die Kraft $\vec{c}$ in zwei Komponenten mit vorgegebenen Richtungen.

Rechnerische Lösung

gesucht sind zwei reelle Zahlen λ und μ so, dass gilt:

(*) $\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$

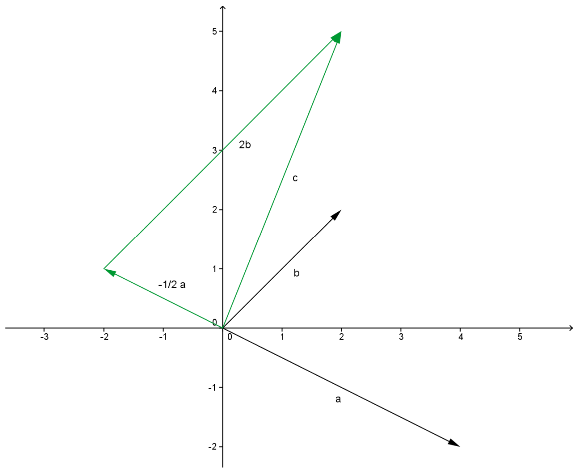
$$\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

$4\lambda + 2\mu = 2$

$-2\lambda + 2\mu = 5$

$\lambda = -0.5$ $\qquad \mu = 2$

Konstruktive Lösung



Bem. zu (*): Wir sagen $\vec{c}$ kann als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden, die drei Vektoren heissen linear abhängig.

Allg gilt:
Sind in der Grundebene zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben, dann kann jeder weitere Vektor $\vec{c}$ eindeutig als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden: $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{0}$ .Die beiden gegeben Vektoren heissen Basisvektoren.

Uebungsaufgabe:

Zerlege den Vektor $\vec{c}=\begin{pmatrix}9\\8\end{pmatrix}$ nach den linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

Lösung: $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$

Drei Vektoren des Raumes, die zu einer Ebene parallel sind heissen komplanar.

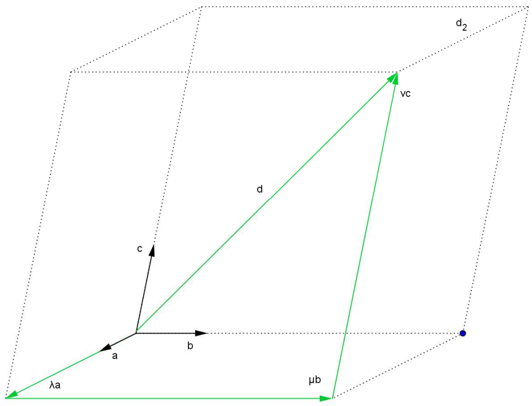
B:

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind komplanar, denn es gilt: $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$. Der Vektor $\vec{c}$ ist also eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Die drei Vektoren heissen in diesem Fall linear abhängig.

Def.
Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ heissen genau dann linear abhängig, wenn gilt: $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$, wobei λ, . μ bzw. ν nicht beide 0 sein dürfen, was sich in der Form $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 \neq 0$ ausdrücken lässt. Andernfalls heissen die Vektoren linear unabhängig.

Sind im Raum drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gegeben (d.h. 3 Vektoren, die nicht komplanar sind) dann kann jeder Vektor $\vec{d}$ des Raumes in drei Komponenten mit vorgegebenen Richtungen zerlegt werden d.h. jeder Vektor des Raumes kann als Linearkombination der drei gegebenen Vektoren in der folgenden Form dargestellt werden:

$$\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$$



Die drei gegebenen Vektoren werden als Basisvektoren bezeichnet.

Aufgabe:

Zerlege den Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -11 \end{pmatrix}$ nach den gegebenen Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Der Ansatz $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$ führt auf das folgende Gleichungssystem: (*)

$$\left| \begin{array}{c} 3\lambda - 5\mu + 4\nu = 5 \\ 7\lambda + 2\mu - 3\nu = 2 \\ 4\lambda + 3\mu - 7\nu = -11 \end{array} \right|$$

Die Lösung des Systems, z.B. mit der Additionsmethode liefert die gesuchte Zerlegung:

$$\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}$$

Uebungsaufgabe:

Zerlege den Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} -8 \\ -13 \\ 12 \end{pmatrix}$ nach den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Umgekehrt kann ein lineares Gleichungssystem auch als Vektorgleichung dargestellt werden (→ Lineare Algebra)