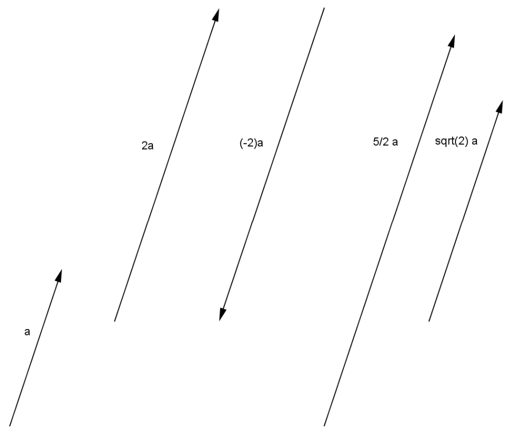
4. Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

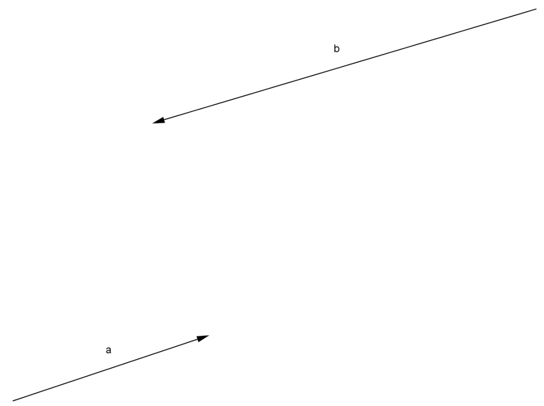


Definition:
Ist $\vec{a}$ ein beliebiger Vektor und k eine reelle Zahl, dann verstehen wir unter $k \cdot \vec{a}$ den Vektor mit den folgenden Eigenschaften:
1. $k \cdot \vec{a}$ hat $|k|$-fache Länge von $\vec{a}$
2. $k \cdot \vec{a}$ ist für k > 0 gleichgerichtet zu $\vec{a}$, für k < 0 zu $\vec{a}$ entgegengesetzt gerichtet, für k = 0 gilt $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

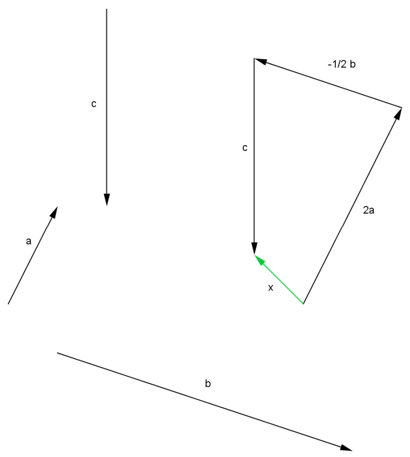
Mit andern Worten: Die Multiplikation mit k bedeutet eine zentrische Streckung des Vektors $\vec{a}$ mit dem Massstab k vom Anfangspunkt aus.

Umgekehrt gilt:
Sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zueinander parallel, dann ist $\vec{b}$ ein Vielfaches von $\vec{a}$, d.h. es gilt $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ mit k $\in$ R. Die beiden Vektoren heissen in diesem Fall linear abhängig.

In der Skizze ist $\vec{b} = -\frac{7}{4} \cdot \vec{a}$



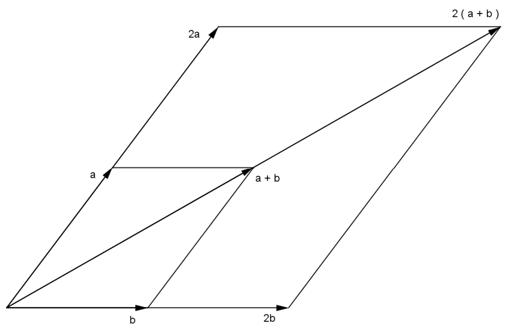
Aufgabe:
Gegeben die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ konstruiere den Vektor $\vec{x} = 2\vec{a} - 0.5 \cdot \vec{b} + \vec{c}$



Für die Multiplikation mit einer reellen Zahl
gelten die folgenden Gesetze.

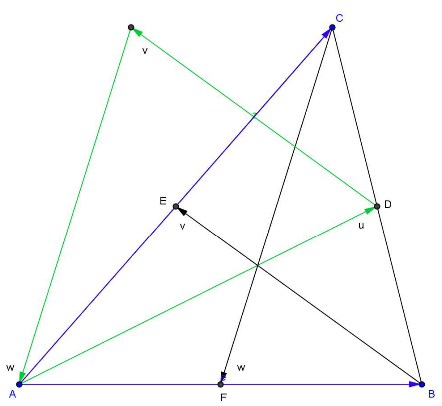
1. $x \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = x\vec{a} + x\vec{b}$
2. $(x + y) \cdot \vec{a} = x\vec{a} + y\vec{a}$ x,y $\in$ R
3. $x \cdot (y\vec{a}) = (xy) \cdot \vec{a}$

Diese Gesetze sagen aus, dass man mit Vektoren
wie in der Algebra rechnen kann.



B:
Löse die folgende Vektorgleichung nach $\vec{x}$ auf:
$-2\vec{a} + 3\vec{x} = 4\vec{b} - 3\vec{c}$ $\vec{x} = \frac{2}{3} \cdot \vec{a} + \frac{4}{3} \cdot \vec{b} - \vec{c}$

Aufgabe:
Gegeben ist in der Grundebene das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Dreiecke ABC, Stelle die drei seitenhalbierenden Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ als Linear-kombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar und bilde die Summe $\vec{u}$ + $\vec{v}$ + $\vec{w}$.
Überprüfe das Ergebnis konstruktiv.



$\vec{u} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\vec{v} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\vec{w} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$

und damit

$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$

Dies bedeutet, dass die drei Vektoren eine geschlossenen Vektorkette bilden.

Trägt man im Raum vom Punkt A aus drei Vektoren ab, die nicht zu einer Ebene parallel sind, so entsteht ein Körper, dessen Seitenflächen aus lauter Parallelogrammen besteht. Dieser Körper heisst Spat (Parallelflach) als Analogon zum Parallelogramm in der Grundebene.

Aufgabe:
Das in der Skizze abgebildete Spat ABCDEFGH wird von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt. S ist der Schwerpunkt des Dreiecks BCE. Drücke die folgenden Vektoren in den gegebenen aus.

$\overrightarrow{BG} = \vec{b} + \vec{c}$

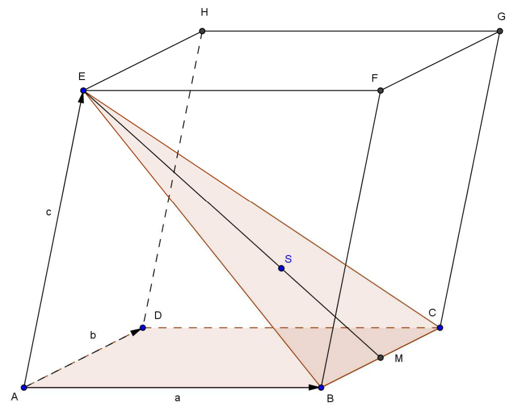
$\overrightarrow{HF} = \vec{a} - \vec{b}$

$\overrightarrow{CE} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b}$

$\overrightarrow{MS} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{ME} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}) = -\frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$

$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MS} = \frac{2}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} + \frac{1}{3} \cdot \vec{c}$



Bem.:
Man sagt, die Vektoren sind als Linearkombination der gegebenen Vektoren dargestellt.

Beweise:
Die Seitenmitten EFGH eines räumlichen Vierecks liegen
in einer Ebene und bilden ein Parallelogramm (Satz von Varignon?).

Beweis:
Es ist zu zeigen, dass $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$
Es sei $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{BC}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{CD}, \quad \vec{d} = \overrightarrow{DA}$.
Mit diesen Bezeichnungen gilt:
$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.
Wegen
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ und
$HG = HD + DG = -\frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c}$ folgt
$EF - HG = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - (-\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{d}) = \vec{0}$