9. Der Kreis

9.1 Die Koordinaten- und Parameterform der Kreisgleichung

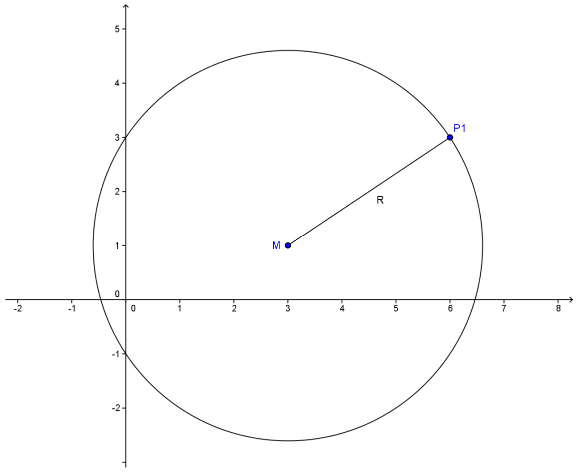
Def.
Unter dem Kreis k mit Mittelpunkt M(u,v) und Radius R versteht man die Menge aller Punkte P(x,y) die von M den Abstand R haben, für die also gilt:

$$\left|\overrightarrow{MP}\right| = R \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MP}\right|^2 = R^2$$

oder in Koordinaten :

k: $(x-u)^2 + (y-v)^2 = R^2$
Koordinatengleichung eines Kreises (1)

M(u,v) Kreismittelpunkt, R Radius,
P(x,y) Kugelpunkt



Spezialfall: M(0/0)

$$x^2 + y^2 = R^2$$

B: (Skizze)
Gleichung des Kreises mit Zentrum M(3,1) durch den Punkt P(6,3).

$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $R = \left|\overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{13}$ k: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 13$

Durch Ausmultiplizieren von Gleichung (1) erhält man eine Gleichung der Form

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ (2)

Umgekehrt kann jede Gleichung der Form (2) durch quadratische Ergänzung auf die Form (1) gebracht werden und stellt somit eine Kugel dar (allenfalls mit Radius 0 oder imaginärem Radius).

B:
Die Gleichung $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 22 = 0$ kann durch quadratische Ergänzung auf die Form gebracht werden:

$$(x-7)^2 + (y+3)^2 = 36$$

Die Gleichung stellt also einen Kreis mit Mittelpunkt M(7,-3) und Radius R = 6 dar.

allg. gilt der folgende

Satz:
Die Gleichung $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ stellt genau dann einen Kreis dar, wenn gilt:
$a^2 + b^2 - 4c > 0$.

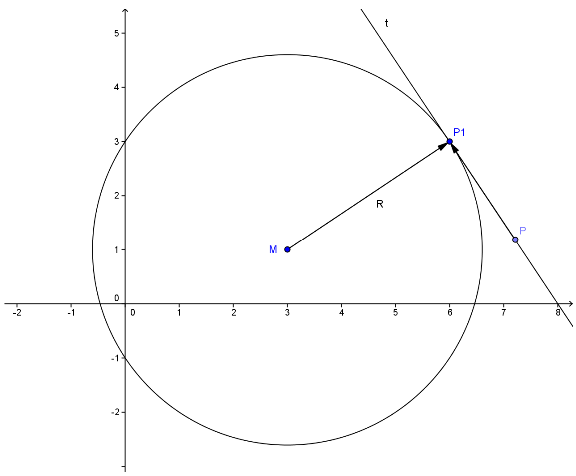
Führt man als Parameter den Zentriwinkel t ein, so erhält man die sogenannte Parametergleichung des Kreises:

$$\begin{aligned} x-u &= R\cdot\cos t \\ y-v &= R\cdot\sin t \end{aligned} \qquad (3) \qquad \text{Parametergleichung des Kreises}$$

Eliminiert man den Parameter t, indem man die Quadrate der beiden Gleichungen addiert, so erhält man wieder die Koordinatengleichung (1) des Kreises.

9.2. Kreistangente

1. Tangente in einem vorgegebenen Punkt $P_1(x_1,y_1)$



$\overrightarrow{MP_1}$ ist ein Normalenvektor der Tangente t, d.h.
$\overrightarrow{PP_1}$ steht auf $\overrightarrow{MP_1}$ senkrecht.

Im Spezialfall M(0,0) gilt also:

$$\overrightarrow{PP_1}\cdot\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-y_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = (x-x_1)\cdot x_1 + (y-y_1)\cdot y_1 = 0 \quad \text{vereinfacht}$$

$$x_1x + y_1y = x_1^2 + y_1^2 = R^2$$

t: $x_1x + y_1y = R^2$ (5)

Der Spezialfall zeigt, wie die Tangentengleichung formal aus der Kreisgleichung erhalten werden kann:

$$x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow xx + yy = R^2 \rightarrow xx_1 + yy_1 = R^2$$

Dieser formale Vorgang heisst Polarisieren. Es kann gezeigt werden, dass dieser auch bei beliebigem Mittelpunkt und auch für Kegelschnitte gilt:

2. Kreistangente mit vorgegebener Richtung

Aufgabe:
An den Kreis k mit Mittelpunkt M(2,5) und Radius r = 4 sind die Tangenten zu legen, welche zur Geraden g: 4x – 3y + 12 = 0 parallel sind.

Ansatz für die gesuchten Tangenten.
t: $4x - 3y + c = 0$
c ist so zu bestimmen, dass der Punkt M von t den Abstand 4 hat:

$\frac{|4x - 3y + c|}{5} = 4$ Lösungen: $c_1 = 27$, $c_2 = -13$

Lösungsvariante: Diskriminantenmethode

3.. Tangente von einem Punkt A an einen Kreis k

Diese Aufgabe kann mit den folgenden Verfahren bestimmt werden:
a) Diskriminantenmehtode
b) Hesse’sche Normalform (HNF)
c) Polarenmethode

Spezialfall A(0,0)
a) Lösung des Tangentenproblems mit der Diskriminantenmethode:
Das Problem eine Gerade mit einem Kreis k zu schneiden führt auf eine quadratische Gleichung mit der Diskriminante D.
3 Fälle:

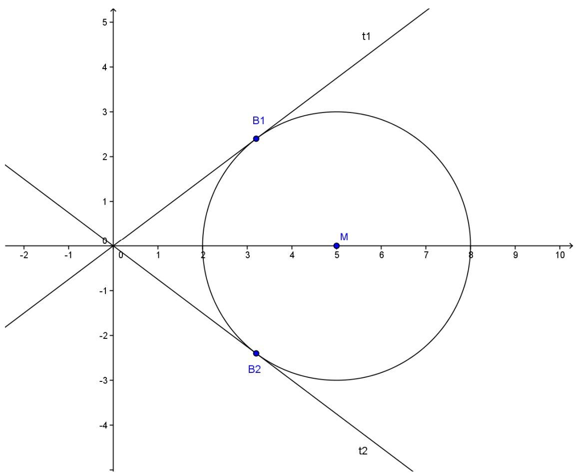
a) D > 0	g ist Sekante
b) D = 0	g ist Tangente
c) D < 0	g meidet k

Aufgabe:
Lege vom Nullpunkt aus die Tangenten an den Kreis $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$.
Ansatz für t: y = mx eingesetzt in die Kreisgleichung
$x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ führt auf

$x^2 (m^2 + 1) - 10x + 16 = 0$ (4)

t ist genau dann Tangente, wenn die Diskriminante von (4) verschwindet.

$D = 36 - 64m^2 = 0$ und daraus
$m = \pm \frac{3}{4}$



Beachte: Diese Methode ist in vielen Fällen sehr rechenaufwändig.

b) Lösung mit der HNF im Spezialfall A(0,0):

Bringe die Gleichung y = mx auf die Hessesche Normalform (HNF):

$$\frac{mx-y}{\sqrt{m^2+1^2}}=0$$

Die Steigung m ist so zu wählen, dass der Kreismittelpunkt M(5,0) von den Tangenten den Abstand R = 3 hat:

$\frac{5m}{\sqrt{m^2+1^2}}=\pm 3 \Leftrightarrow \left(\frac{5m}{\sqrt{m^2+1^2}}\right)^2=9$ oder $25m^2=9m^2+9$ und erneut: $m=\pm\frac{3}{4}$

Lösung des Problems für eine beliebige Lage von A:

Aufgabe:
Lege vom Punkt P(-4,3) die Tangenten an den Kreis k: $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$

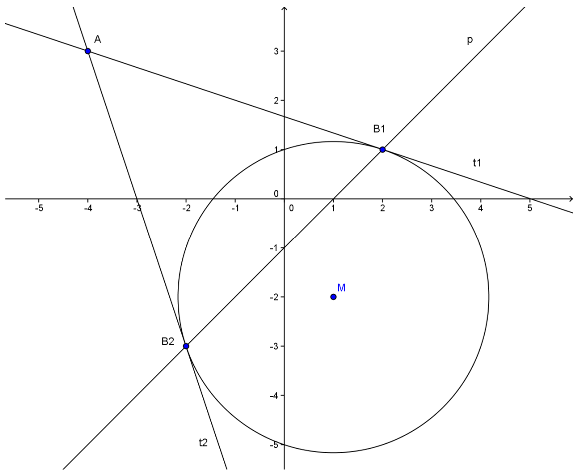
Lösung mit der Hesse'schen Normalform:

Mit quadratischer Ergänzung ergibt sich für k der Mittelpunkt M(1,-2) und der Radius $R = \sqrt{10}$

Ansatz für t: y = mx + q
Da P(-4,3) die Tangentengleichung folgt: q = 3 + 4m.
HNF von t: $\dfrac{mx - y + 4m + 3}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = 0$
Die gesuchten Kreistangenten haben von P(-4,3) den Abstand R

$\left(\dfrac{m + 2 + 4m + 3}{\sqrt{m^2 + 1^2}}\right)^2 = 10$ bzw. $5 \cdot \left(3m^2 + 10m + 3\right) = 0$ mit den Lösungen $m_1 = -3$ und $m_2 = -\frac{1}{3}$

Lösung der Aufgabe nach der Polarentheorie



Setzt man in der Tangentengleichung statt eines Kreispunktes einen Punkt A ausserhalb des Kreises ein, so stellt die Gleichung wieder eine Gerade p dar. Es seien B_1 und B_2 die Berührungspunkte der Tangenten mit dem Kreis. Es kann gezeigt werden, dass p die Verbindungsgerade der Punkte Berührungspunkte B_1 und B_2 ist. Die Aufgabe ist damit darauf zurückgeführt, die Polare mit dem Kreis k zu schneiden.

Kreisgleichung

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$	polarisieren
$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 - (x + x) + (2y + 2y) - 5 = 0$	Koordinaten von A(-4,3) einsetzen:
$x \cdot (-4) + y \cdot 3 - (x - 4) + (2y + 2 \cdot 3) - 5 = 0$	vereinfachen
$y = x - 1$	Gleichung der Polaren
mit dem Kreis schneiden	
$x^2 = 4$	Berührungspunkte $B_1(2,1)$, $B_2(-2,-3)$