Analytische Geometrie des Raumes

Als Begründer der analytischen Geometrie gilt René Descartes (Discours de la méthode). Seine grundliegende Idee bestand darin, geometrische Gebilde (Gerade, Kreis, Ellipse Parabel, Hyperbel, usw.) bezüglich eines rechtwinkligen Koordinatensystems durch Gleichungen zu beschreiben.

1. Repetition der Vektorrechnung

Die Komponenten eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ können als Relativkoordinaten des Endpunkts bezüglich des Anfangspunkts aufgefasst werden. Wird ein Vektor im Ursprung abgetragen, so spricht man von einem Ortsvektor. Die Komponenten eines Ortsvektors stimmen mit den Koordinaten des Endpunkts überein.
Im folgenden werden immer wieder gebraucht:

(1) Absoluter Betrag $\lvert\vec{v}\rvert$ eines Vektors $\vec{v}$ **:**	$\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
(2) Verbindungsvektors zweier Punkte $\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ "Endpunkt minus Anfangspunkt"
(3) Mittelpunkt M einer Strecke:	$\vec{m} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ "halber Diagonalenvektor eines Parallelogramms"

2. Darstellung der Geraden in der Grundebene

2.1 Koordinatengleichung

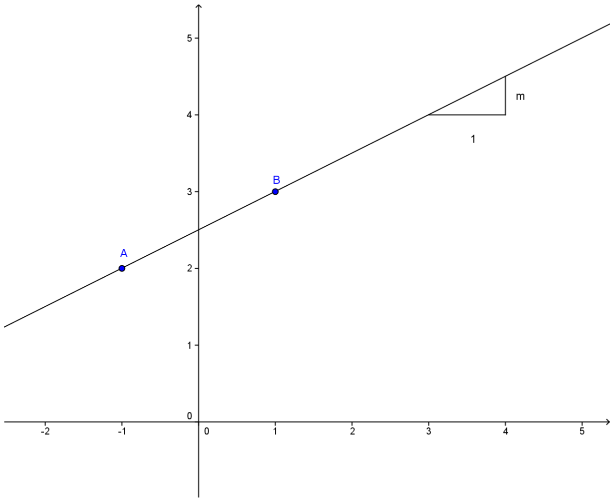
Eine Gerade der Grundebene, die nicht zur y-Achse parallel ist, kann bekanntlich durch eine Gleichung der Form y = mx + q dargestellt werden (explizite Form der Geradengleichung).
$m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ heisst Steigung der Geraden, α Steigungswinkel, q y-Achsenabschnitt

Bem.
m beschreibt die Änderung von y, wenn x um 1 wächst. Ist m < 0 so fällt die Gerade, für m > 0 steigt sie. Bei Parallelen zur x-Achse ist m = 0

B:
Koordinatengleichung der Geraden durch die Punkte A(-1,2) B(1,3):

(1) Ansatz y = mx + q
Steigung $m = \frac{3-2}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$
Der y-Achsenabschnitt $q = \frac{5}{2}$ ergibt sich, indem man die Koordinaten von A oder B in die Geradengleichung einsetzt.

Gesuchte Gleichung $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$



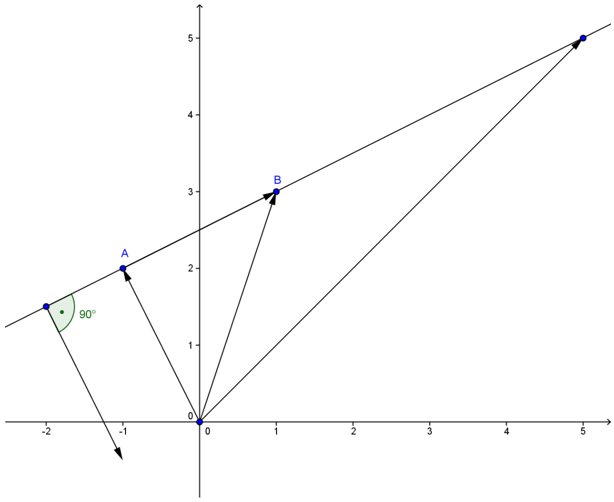
2.2 Parametergleichung der Geraden

Eine Gerade kann aber auch vektoriell durch eine sogenannte Parametergleichung der Geraden beschrieben werden

Ist eine Gerade g durch die beiden Punkte A und B festgelegt, dann gilt für jeden Geradenpunkt P: $\overrightarrow{AP}$ ist ein geeignetes Vielfaches des Richtungsvektors $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ d.h.

$\overrightarrow{AP} = t \cdot \vec{u}$ mit $t \in R$

Für den Ortsvektor $\vec{r}$ zu einem beliebigenGeradenpunkt P gilt damit:



$\vec{r} = \vec{a} + t \cdot \vec{u}$ Parametergleichung der Geraden

$\vec{r}$: Ortsvektor zu einem beliebigen Geradenpunkt P
$\vec{a}$: Ortsvektor zu einem gegebenen Geradenpunkt A
$\vec{u}$: Richtungsvektor der Geraden z.B. $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
t: Parameter, der aussagt, „wie oft“ der Richtungsvektor von A aus abzutragen ist, um nach P zu gelangen.

Parametergleichung der Geraden durch die Punkte A(-1/2) B(1/3):

(2) $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad x = -1 + 2t$, $\quad y = 2 + t$

Die Parametergleichung beschreibt die Bewegung eines Massenpunktes, der zur Zeit t = 0 im Punkt A startet und sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $\vec{u}$ bewegt.

a)
Wo befindet sich der Punkt zur Zeit t = 5? P(9,7)
b)
Zu welcher Zeit erreicht der Punkt die x-Achse?
y = 0 für t = -2 und damit x = -5 P(-5,0)
Nach welcher Zeit hat der Massenpunkt eine Strecke der Länge $d = \sqrt{45}$ zurückgelegt?
Da der Richtungsvektor (d.h. Geschwindigkeitsvektor) den absoluten Betrag $|\vec{u}| = \sqrt{5}$ hat, gilt:
$|t| = 3$ d.h. in 3 Zeiteinheiten legt der Massenpunkt eine Strecke der Länge $d = \sqrt{45}$ zurück.

Eliminiert man in (2) den Parameter t, so erhält man erneut die Koordinatengleichung (1)
$x = -1 + 2t$
$y = \ \ 2 + \ t \qquad \Big| \cdot(-2)$ addiert
$x - 2y + 5 = 0$ (3) oder $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Allg:
Multipliziert man die beiden Komponenten der Parametergleichung mit geeigneten Faktoren

(2) $x = a_1 + tu_1 \qquad \cdot u_2 \neq 0$
$\quad y = a_2 + tu_2 \qquad \cdot(-u_1) \neq 0$

so erhält man nach Addition der beiden Gleichungen
$u_2x - u_1y = a_1u_2 - a_2u_1$ bzw. $u_2x - u_1y - a_1u_2 + a_2u_1 = 0$ (*)
also eine Gleichung der Form

(4) $ax + by + c = 0$. Diese Gleichung heisst **implizite Form der Geradengleichung**

Bem.
Es dürfen nicht beide Koeffizienten a und b gleich 0 sein d.h. es muss $a^2 + b^2 \neq 0$ sein.

Fasst man die Koeffizienten von x bzw. y als Komponenten eines Vektors $\vec{n}$ auf, so gilt:

Satz:
Jede Gerade in der Grundebene kann durch eine Gleichung der Form $ax + by + c = 0$ dargestellt werden. $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Geraden.

Beweis:
Liegen $P_1(x_1/y_1)$ und $P_2(x_2/y_2)$ auf der Geraden g dann gilt:

$ax_1 + by_1 + c = 0$
$ax_2 + by_2 + c = 0$

Die Differenz der beiden Gleichungen ergibt: $a\cdot(x_2 - x_1) + b\cdot(y_2 - y_1) = 0$ oder als Skalarprodukt aufgefasst: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$.

Die Aussage ergibt sich ebenfalls aus der Gleichung *. Der aus den Koeffizienten von x und y gebildete Vektor $\begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix}$ und jedes Vielfache davon steht auf dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \end{pmatrix}$ der geraden senkrecht.

Bem.
Im Beispiel ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
Ist in (4) b = 0, so stellt (4) eine Parallele zur y-Achse dar. Andernfalls kann man die Gleichung nach y auflösen und erhält:

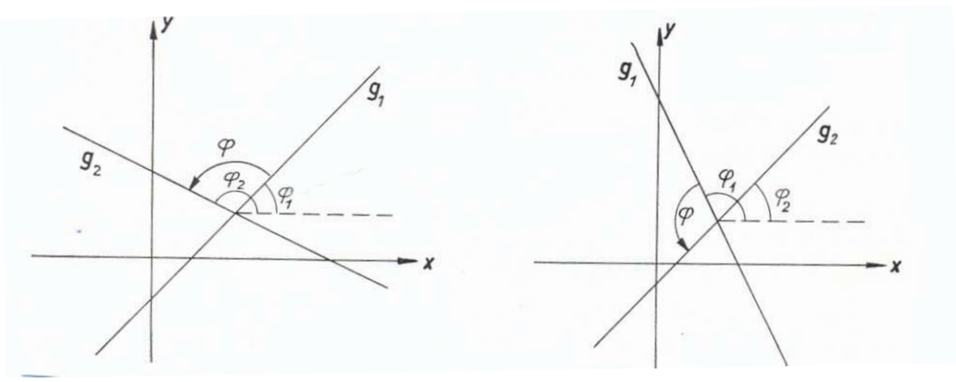
$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ d.h eine Gerade mit der Gleichung y = mx + q

$m = -\frac{a}{b}$ heisst Steigung, $q = -\frac{c}{a}$ y-Achsenabschnitt.

2.3 Zwischenwinkel zweier Geraden

Gegeben sind zwei Geraden g_1 und g_2 mit den Steigungen m_1 bzw. m_2. Bekanntlich gilt dann für die Steigungswinkel φ_1 bzw. φ_2 :
$m_1 = \tan\varphi_1$ bzw. $m_2 = \tan\varphi_2$:
Gesucht ist der Winkel φ, um den man g_1 im positiven Sinn drehen muss, bis g_1 mit g_2 zusammenfällt.
Für diesen Winkel gilt entweder

$\varphi_1 + \varphi = \varphi_2$ oder $\varphi_1 + \varphi = \varphi_2 + 180°$
also $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 + 180°$



Wegen der Periodizität von 180° des Tangens gilt in beiden Fällen:

$$\tan\varphi = \tan(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1}{1 + \tan\varphi_1 \tan\varphi_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

B:

g_1 : 2x - 3y + 6 = 0 $y = \frac{2}{3}x + 2$ $m_1 = \frac{2}{3}$
g_2: x + 2y + 4 = 0 $y = -\frac{1}{2}x - 2$ $m_2 = -\frac{1}{2}$

$$\tan\varphi = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} = -\frac{7}{4} \quad \varphi = 180° - 60.3° = 119.7°$$

Spezialfall:
Wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$ gilt stehen g_1 und g_2 senkrecht aufeinander.

Bem:
Der Zwischenwinkel kann auch mit dem Skalarprodukt als Winkel zwischen den Richtungsvektoren $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_1 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ bestimmt werden:

2.4 Beispiele

Aufgabe:
Zwei Schiffe A und B fahren auf geradlinigen Kursen mit konstanten Geschwindigkeiten aufeinander zu. Wann kommen sie sich am nächsten?

B
Zur Zeit t = 0 befinden sich die beiden Schiffe in A(0,0) bzw. B(0,5)

Geschwindigkeiten $\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

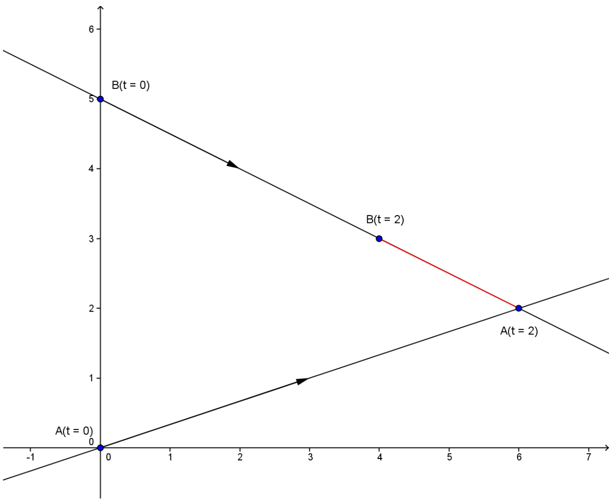
Nach t Zeiteinheiten befinden sich die beiden Schiffe bei

$\vec{r}_A = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Für den Verbindungsvektor der beiden Schiffe gilt:

$\vec{r}_A - \vec{r}_B = \begin{pmatrix} -t \\ 5 - 2t \end{pmatrix}$

Der Abstand wird minimal, wenn der absolute Betrag des Verbindungsvektors bzw. dessen Quadrat minimal ist.



Dieses Abstandsquadrat
$D(t) = t^2 + (5 - 2t)^2 = 5(t - 2)^2 + 5$
wird für t = 2 minimal. Zu diesem Zeitpunkt befinden sich die Körper in den Punkten A(6,2) bzw. B(4,3).

Wegen D(2) = 5 ist der minimale Abstand $\sqrt{5}$.

Eine geometrische Lösung dieses Problems:

Idee:
Betrachte die Bewegung des Schiffes B von A aus:
Wegen $\overrightarrow{PQ} = \vec{b} + t \cdot \vec{u} - (\vec{a} + t \cdot \vec{v}) = \vec{b} - \vec{a} + t \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ befindet sich B - vom Schiff A aus gesehen - am Ort $\vec{a} + \overrightarrow{PQ} = \vec{b} + t \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ d.h. B bewegt sich scheinbar auf einer Geraden g' durch B mit der Differenzgeschwindigkeit $\vec{u} - \vec{v}$
Zur Lösung fällt man das Lot von A auf g' und ermittelt P auf g_1 und Q auf g_2 so, dass $\overrightarrow{AQ}' = \overrightarrow{PQ}$.