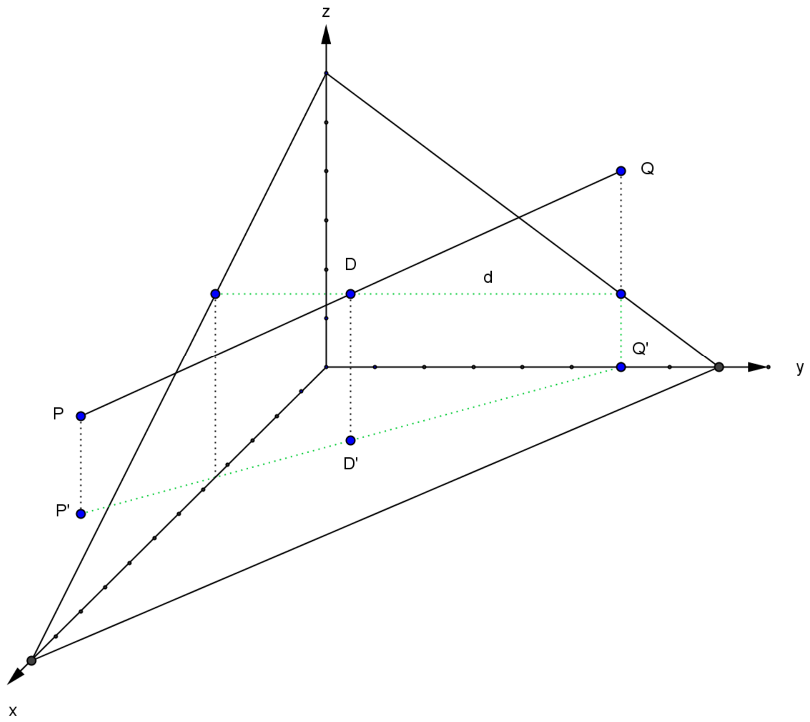
5. Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

5.1 Gegenseitige Lage zweier Geraden (siehe Kap. 3.2)

5.2: Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene

Beispiel:
ε: 2x + 3y + 4z - 24 = 0   g = P(6, -2, 2)Q(0, 6, 4)



geometrisch: Lege eine Hilfsebene senkrecht zur Grundrissebene durch g. Diese schneidet die gegebene Ebene in einer Geraden d. d und g schneiden sich im gesuchten Durchstosspunkt D.

In der Parametergleichung der Geraden ist t so zu bestimmen, dass die Koordinaten des Geradenpunktes auch die Ebenengleichung erfüllen (es handelt sich also um die Aufgabe, ein Gleichungssystem mit 4 Unbekannten x, y, z, t und 4 Gleichungen zu lösen):

$$g:\quad \begin{aligned} x &= 6-3t \\ y &= -2+4t \\ z &= 2+t \end{aligned} \qquad \text{eingesetzt in die Ebenengleichung}$$

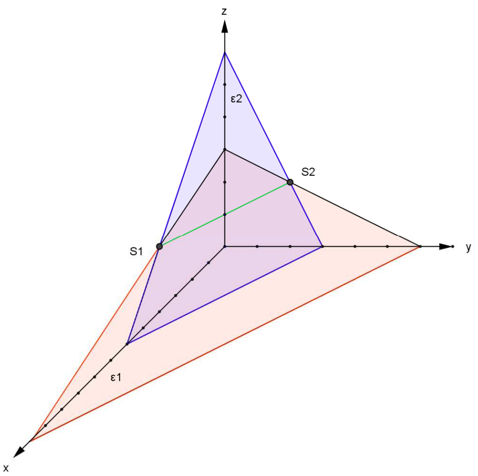
2·(6 - 3t) + 3·(-2 + 4t) + 4·(2 + t) - 24 = 0
t = 1 und damit   D(3, 2, 3).
Das Resultat bedeutet, dass ein in P(6, -2, 2) startender Massenpunkt nach einer Zeiteinheit die Ebene erreicht.

Spezialfälle sind daran erkennbar, dass der Richtungsvektor von g auf dem Normalenvektor der Ebene senkrecht steht:
Ist g parallel zu ε dann existiert kein Schnittpunkt. In diesem Fall hat die zugehörige Gleichung die Form $0 \cdot t = k$ mit $k \neq 0$.
Liegt g in ε dann gibt es unendlich viele Schnittpunkte. In diesem Fall hat die zugehörige Gleichung die Form $0 \cdot t = 0$.

5.3: Schnitt zweier Ebenen

Beispiel:
ε_1: $x + 2y + 4z - 12 = 0$
ε_2: $x + 2y + z - 6 = 0$

Lösungsidee geometrisch:
Die Spuren der beiden Ebenen schneiden sich in den Punkten S_1 und S_2, womit die Schnittgerade bestimmt ist.



rechnerische Lösung:
Es handelt sich um das Problem, ein Gleichungssystem mit 3 Unbekannten und 2 Gleichungen zu lösen. In der Regel kann eine der Unbekannten beliebig vorgegeben werden, die andern beiden sind dann eindeutig bestimmt.
Analog zur geometrischen Lösung suchen wir die Gleichungen der Spuren in der xz- bzw. yz-Ebene:

xz-Ebene: $y = 0$	$x + 4z - 12 = 0$			
	$x + z - 6 = 0$	mit der Lösung	$z = 2, x = 4$	$S_1(4, 0, 2)$
yz-Ebene: $x = 0$	$2y + 4z - 12 = 0$			
	$2x + z - 6 = 0$	mit der Lösung	$y = z = 2$	$S_2(0, 2, 2)$

Parametergleichung der Schnittgeraden s: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Schnittgerade ist parallel zur xy-Ebene! Das heisst, dass in diesem Fall die z-Koordinate nicht beliebig vorgegeben werden kann.

Allgemein:
Da die Schnittgerade in beiden Ebenen liegt, ist der Richtungsvektor orthogonal zu den Normalenvektoren der beiden Ebenen, d.h. er hat damit Richtung $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Zweckmässigerweise wählt man folgendes Vorgehen:
1. Prüfe anhand der Normalenvektoren, ob die beiden Ebenen parallel sind oder zusammenfallen.
2. Bestimme andernfalls mit dem Vektorprodukt den Richtungsvektor der Schnittgeraden (dieser ermöglicht es, eine spezielle Lage der Schnittgerade zu erkennen).
3. Bestimme einen Punkt der Schnittgeraden.

Illustration an Beispielen:

B1 :
Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, die Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

ε_1: $2x + 3y - z - 12 = 0$
ε_2: $x - y + 2z - 1 = 0$

Durch das Vektorprodukt der Normalenvektoren $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = (-5) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der Richtungsvektor bestimmt.
Die 1. Spuren der beiden Ebenen (z = 0) schneiden sich in $S_1(3, 2, 0)$

Parametergleichung der Schnittgeraden: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (*)

B2:
Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, die beiden Ebenen fallen zusammen.

ε_1: $4x + 3y + z - 12 = 0$
ε_2: $-8x - 6y - 2z + 24 = 0$

Die 2. Gleichung geht nach Division durch (-2) in die 1. Gleichung über, die beiden Ebenen fallen zusammen.

B3:
Das Gleichungssystem hat keine Lösung

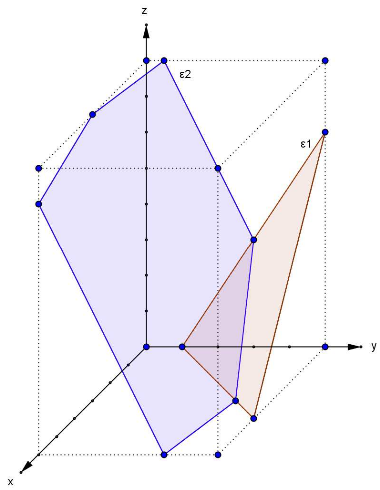
ε_1: $4x + 3y + z - 12 = 0$
ε_2: $-8x - 6y - 2z + 9 = 0$

Die Normalenvektoren sind linear abhängig. Die beiden Ebenen sind parallel, aber nicht zusammenfallend.

Ausblick:
In der Linearen Algebra wird allgemein die Lösbarkeit eines Gleichungssystems mit n Unbekannten und m Gleichungen untersucht. In diesem Sinne kann das Ergebnis der vorangegangenen Aufgabe folgendermassen interpretiert werden:
Ein Gleichungssystems mit 3 Unbekannten und 2 Gleichungen hat entweder keine oder unendlich viele Lösungen.

Aufgabe:
Bestimme die Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen
ε_1: $3x - 3y + 2z + 3 = 0$
ε_2: $x + 6y + 3z - 27 = 0$

In der folgenden Abbildung sind zusätzlich die Schnitte der Ebenen mit einem geraden Prisma dargestellt.



Die beiden Ebenen schneiden die xy-Ebene in den Geraden
$3x - 3y + 3 = 0$
$x + 6y - 27 = 0$
Ihr Schnittpunkt S(4,3) liegt auf der Schnittgeraden. Der Richtungsvektor ist parallel zum Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren

Gleichung der Schnittgeraden:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

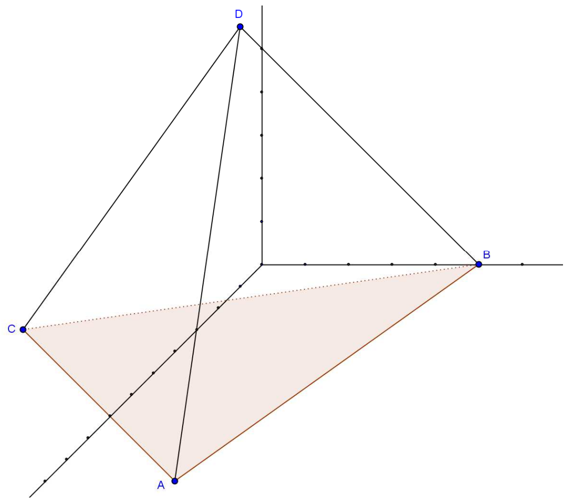
Uebungsaufgabe:
Bestimme die Schnittgerade der beiden Ebenen:
ε_1: $x + 2y + 3z - 9 = 0$
ε_2: $2x + y + z - 6 = 0$

Lösung: Die Schnittgerade ist durch die Punkte $S_1(1, 4, 0)$ und $S_2(2, -1, 3)$ bestimmt

5.4: Schnitt von drei Ebenen

Aufgabe:
Bestimme den Schnittpunkt der drei Ebenen
$\varepsilon_1: \quad 4x + 20y + 5z - 100 = 0 \quad \varepsilon_2: \quad 2x - 2y + z - 14 = 0 \quad \varepsilon_3: \quad 6x + 2y - 3z - 10 = 0$

Es handelt sich um die bekannte Aufgabe, ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 3 Unbekannten zu lösen(→ Kap. Lineare Gleichungsysteme).
Das Gleichungssystem hat die Lösung
x = 5, y = 2, z = 8. Damit schneiden sich die drei Ebenen im Punkt D(5, 2, 8). Bestimmt man ausserdem die Schnittgeraden der drei Ebenen mit der xy-Ebene, so entsteht die abgebildete Pyramide mit der Grundfläche A(10, 3, 0), B(0, 5, 0) und C(3, -4, 0)



Uebungsaufgaben:

a)
4x + 3y + z - 13 = 0
2x - 5y + 3z - 1 = 0
7x - y - 2z + 1 = 0

eliminiere z.B. z
10x + 14y - 38 = 0 | (-3)
15x + 5y - 25 = 0 |·2 -32y - 64 = 0

x = 1 y = 2 z = 3 Die 3 Ebenen schneiden sich im Punkt S(1/2/3)

b)
8x + 9y + 12z = 72
4x + 3z = 24
2x + y - z = 2

Die 3 Ebenen schneiden sich im Punkt S(3/0/4).

c)
Bestimme eine Gleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen ε_1 und ε_2. bestimme die Koeffizienten b und c der Ebene ε_3 so, dass die drei Ebenen eine gemeinsame Schnittgerade haben.

$\varepsilon_1: \quad 4x+3y+2z+1=0 \qquad \varepsilon_2: \quad x+2y+3z+4=0 \qquad \varepsilon_3: \quad x+by+cz+7=0$

Richtungsvektor der Schnittgeraden: $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Parametergleichung der Schnittgeraden: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wähle z.B. zwei Punkte auf der Schnittgeraden z.B. (2, -3, 0) und (3, -5, 1). Ihre Koordinaten erfüllen die Gleichung der Ebene ε_3.
Gleichung der gesuchten Ebene $\varepsilon_3: \quad x+3y+5z+7=0$

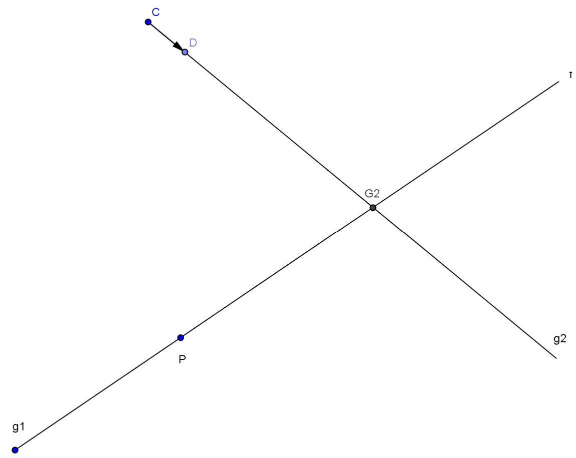
5.5: Das Transversalenproblem

Eine Transversale t ist eine Gerade, welche zwei vorgegebene windschiefe Geraden schneidet.

Aufgabe:
Bestimme eine Transversale t zu den Geraden g_1 = AB und g_2 = CD, die zur den Punkt P geht.

Lösungsidee:

Die Transversale t liegt in der durch die Gerade g_1 und den Punkt P aufgespannten Ebene τ (in der Skizze ist die Gerade g_1 und damit auch τ projizierend dargestellt).
Schneide diese Ebene τ mit der zweiten Geraden g_2.



Beispiel:
g_1 = A(-5, 0, 2) B(-4, 1, 3), g_2 = C(2, 4, 0)D(3, 2, 2), P(-3, 5, 8).

Die Ebene τ ist durch den Punkt A und die Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

festgelegt. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor von τ.

Koordinatengleichung von τ: x - 4y + 3z - 1 = 0

Die Ebene τ ist mit der Geraden g_2: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu schneiden: G_2(3/2/2).

$\overrightarrow{G_2P} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor von t.

Die gesuchte Transversale t hat damit die Gleichung t: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Kontrolle:
Es ist zu überprüfen, ob t die Gerade g_1 schneidet. Tatsächlich schneidet t die Gerade g_1 im Punkt G_1(-1/4/6).

Aufgabenvariante:
Transversale mit vorgegebener Richtung (siehe auch kürzester Abstand zweier Geraden).

Aufgabe:
Gegeben ist die Gerade g. Gesucht ist die Transversale t mit vorgegebener Richtung, welche die Gerade g und die y-Achse schneidet.

g = A(0, 0, -12) B(4, 2, -8), Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Transversale liegt in der Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und der Gleichung: x + z = 0. Sie schneidet die Gerade g im Punkt G(6, 3, -6) und die y-Achse im Punkt Y(0, 3, 0).

Die gesuchte Transversale t hat damit die Gleichung t: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$