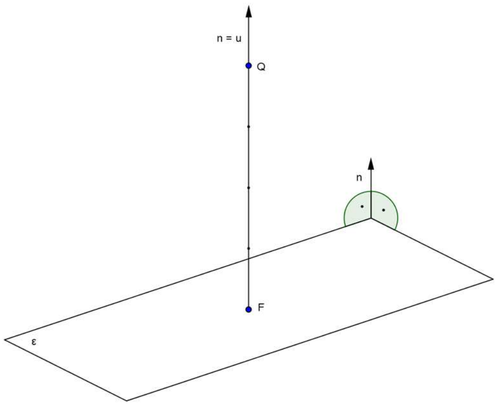
7. Abstandsprobleme

7.1 Kürzester Abstand eines Punktes Q von einer Ebene ε



Lösungsidee:
Fälle von Q das Lot *l* auf die Ebene ε.
Der Normalenvektor von ε ist ein Richtungsvektor des Lots *l*. *l* schneidet ε in F.
Der absolute Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{QF}$ ergibt den gesuchten Abstand e

B: Q(8, -1, 14) ε: 2x - y + 2z - 9 = 0

$$l:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2(8 + 2t) - (-1 - t) + 2(14 + 2t) - 9 = 0 $t_F = -4$ Lotfusspunkt F(0, 3, 6).
Der absolute Betrag des Verbindungsvektors

$$\overrightarrow{QF} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ergibt den gesuchten Abstand e = 12.

Das Ergebnis bedeutet mit andern Worten: Um von Q aus auf kürzestem Weg in die Ebene ε zu gelangen, ist der Richtungsvektor $\vec{u}$ von Q aus viermal in entgegengesetzter Richtung abzutragen. Der absolute Betrag des Parameters t misst also den kürzesten Abstand des Punktes Q von der Ebene. Masseinheit ist der absolute Betrag des Richtungsvektors $\vec{u}$.

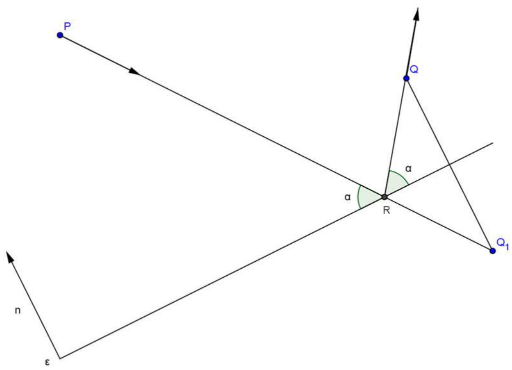
Zusatzaufgabe:
Spiegle den Punkt Q an der Ebene ε.

Dem Spiegelpunkt Q_1 entspricht der doppelte Parameterwert $2t_F = -8$ Q_1 (-8, 7, -2)

Aufgabe:
Ein vom Punkt P(4, 5, -1) ausgehender Lichtstrahl wird an der Ebene ε: x + 3y - 2z - 7 = 0 reflektiert. Der reflektierte Strahl durch den Punkt Q(-7, 8, -9). Bestimme den Reflexionspunkt R und die Gleichung des reflektierten Strahls.

Lösungsidee:

In der Skizze ist die Ebene ε projizierend dargestellt.
Spiegle Q (oder P) an der Ebene ε.



Q an ε spiegeln: $l: \vec{r} = \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$t_F = -2$ $Q_1(-11, -4, -1)$
analog $P_1(2,-1,3)$

Der Reflexionspunkt R ist der Schnittpunkt der Geraden PQ_1 mit der Ebene ε:

PQ_1: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $t_R = -1$ R(-1, 2, -1)

Gleichung des reflektierten Strahls $\bar{l}$: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

Bem.:
Bei der Aufgabenstellung ist zu überprüfen, ob P und Q in denselben Halbraum von ε. Dies kann mit der im Folgenden besprochenen Hesse'schen Normalform einfach geschehen.

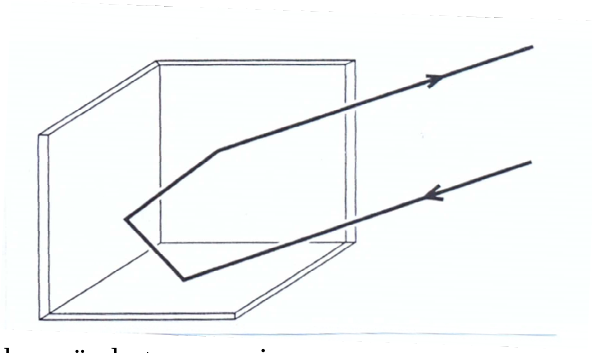
Übungsaufgabe:
Ein vom Punkt P(-2, -4,-6) ausgehender Lichtstrahl wird an der Ebene ε: 4x - 3y - z - 24 = 0 im Punkt R(2, -6, z) der Ebene ε reflektiert. Bestimme eine Gleichung des reflektierten Strahls.

Lösung:
Der Punkt P wird an der Ebene ε gespiegelt: Spiegelpunkt P_1(6, -10, .4)
Der reflektierte Strahl ist durch die beiden Punkte P_1 und R(2, -6, 2) bestimmt.

l: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Eine schöne Anwendung zu Spiegelungsaufgaben ist der sogenannte

Eckenspiegel



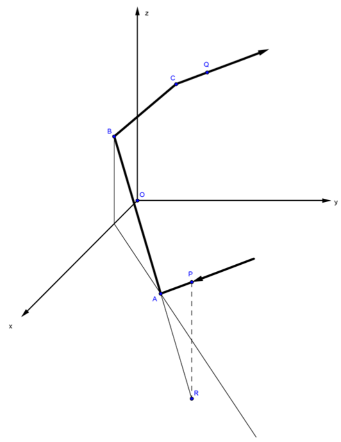
Ein Eckenspiegel (Kroll: Analytische Geometrie, p. 33)) besteht aus drei ebenen Spiegeln, die paarweise senkrecht aufeinander stehen. Fällt ein Lichtstrahl von vorn in seine Öffnung, so wird er im Allgemeinen dreimal reflektiert. Nehmen wir an, dass die drei Spiegel in die Koordinatenebenen fallen, so kann der Lichtweg leicht berechnet werden. Bei der Spiegelung eines Punktes an einer Koordinatenebene ändert genau eine Koordinate das Vorzeichen, während die beiden andern unverändert bleiben. Nach der dritten Spiegelung hat also die Richtung $\vec{v}$ des Lichtstrahls zu $-\vec{v}$ geändert, d.h. der Lichtstrahl verlässt den Eckenspiegel in entgegengesetzter Richtung.

Eine Anwendung dieses Prinzips ist der Rückstrahler (das Katzenauge) beim Fahrrad oder Auto: Ein Objekt wird gut wahrgenommen, wenn es möglichst viel Licht zurückstrahlt, sobald es von einer bewegten Lichtquelle beleuchtet wird.

Zahlenbeispiel:
Auftreffpunkt in der xy-Ebene:
A(8, 6, 0)

Lichtrichtung: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Der an der xy-Ebene reflektierte Strahl trifft die xz-Ebene in B(2, 0, 4.5)
Der an der xz-Ebene reflektierte Strahl trifft die yz-Ebene in C(0, 2, 6)
Der an der yz-Ebene reflektierte Strahl hat die Richtung $\overrightarrow{BC'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$



Otto Hesse (1811-1874) hat folgenden einfachen Weg zur Abstandsbestimmung gefunden:

Gegeben ein Punkt $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ und die Ebene ε: ax + by + cz + d = 0.

Idee:
Die Gleichung einer Ebene ist nicht eindeutig bestimmt. Eine gegebene Ebenengleichung kann mit einem beliebigen Faktor ≠ 0 multipliziert werden. Wir wählen die Koeffizienten in der Ebenengleichung so, dass der Normalenvektor gerade den Betrag 1 hat. Dies kann erreicht werden, indem man die Ebenengleichung durch den absoluten Betrag des Normalenvektors dividiert. Schneidet man das Lot *l* mit der Ebene ε, dann gibt der Betrag des Parameters t wegen $|\vec{n}| = 1$ gerade den Abstand des Punktes Q von der Ebene ε an.

Durchführung:

$l\colon\ \vec{r} = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ mit ε schneiden:

$a\cdot(x_Q + t\cdot a) + b\cdot(y_Q + t\cdot b) + c\cdot(z_Q + t\cdot c) + d = 0$
$ax_Q + by_Q + cz_Q + d + t\cdot(a^2 + b^2 + c^2) = 0$ also wegen $(a^2 + b^2 + c^2) = 1$
$-t = ax_Q + by_Q + cz_Q + d$ und damit $e = |ax_Q + by_Q + cz_Q + d|$

Regel von Hesse:
Man erhält (vom Vorzeichen abgesehen) den Abstand eines Punktes Q von der Ebene ε, indem man die Koordinaten von Q in die linke Seite der Koordinatengleichung einsetzt und durch den absoluten Betrag des Normalenvektors dividiert.

B:

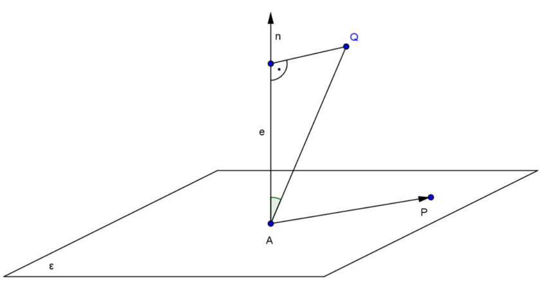
Q(9, 18, 9) ε: x + 2y + 2z - 18 = 0 $e = \frac{|9 + 2\cdot 18 + 2\cdot 9 - 18|}{3} = 15$

O(0/0/0) ε: x + 2y + 2z - 18 = 0 $e = \frac{|-18|}{3} = 6$

Bem.:
Die Ebene zerlegt den Raum in zwei Halbräume. Für Punkte im einen Halbraum sind die Vorzeichen positiv, für Punkte im andern negativ.

Mit der Regel von Hesse kann auch der Parameter d geometrisch interpretiert werden: Dividiert man d durch den absoluten Betrag des Normalenvektors, so erhält man (vom Vorzeichen abgesehen) gerade den Abstand der Ebene vom Nullpunkt.

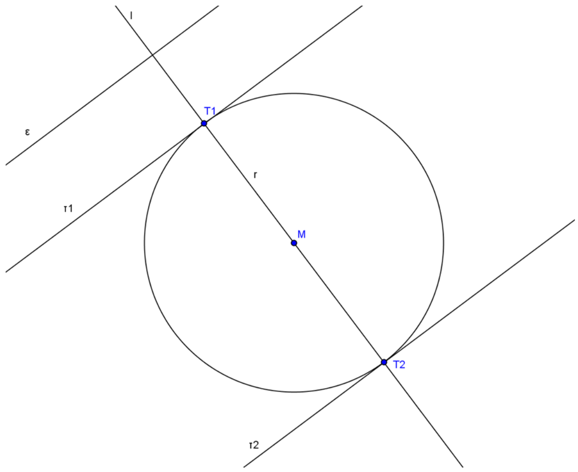
Variante für die Herleitung:
Die Ebenengleichung kann in vektorieller Form folgendermassen geschrieben werden:
$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{a}) = 0$ mit $|\vec{n}| = 1$ Für einen Punkt Q mit Ortsvektor $\vec{q}$, der nicht in der Ebene liegt, gilt nach Definition des Skalarprodukts:
$\vec{n}\cdot(\vec{q}-\vec{a}) = |\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AQ}|\cdot\cos\varphi = |\overrightarrow{AQ}|\cdot\cos\varphi = \pm e$



Aufgabe:

Bestimme die Tangentialebenen τ einer Kugel k(M,r), die zu einer vorgegebenen Ebene ε parallel sind.
M(2, -1, -3), r = 6, ε: x + 2y - 2z +1 = 0

Ansatz für die gesuchten Tangentialebenen:
$\tau_{1,2}$: x + 2y - 2z + d = 0



1. Lösungsidee
Die Berührungspunkte T_1 und T_2 der Tangentialebenen mit der Kugel liegen auf dem Lot *l* zur Ebene ε durch M und haben vom Kugelmittelpunkt M den Abstand r. Die Aufgabe ist deshalb darauf zurückgeführt, von M aus auf *l* die wahre Länge r abzutragen.

$$l: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Da der Richtungsvektor von *l* den Betrag 3 hat, entsprechen den Punkten T_1 und T_2 die Parameterwerte $t_{1,2} = \pm 2$.

$t_1 = 2$ $\quad T_1(4, 3, -7)$ $\qquad t_2 = -2$ $\quad T_2(0, -5, 1)$

τ_1: x + 2y - 2z - 24 = 0
τ_2: x + 2y - 2z + 12 = 0

2. Lösungsidee nach Hesse:
d ist so zu bestimmen, dass der Kugelmittelpunkt M von τ den Abstand r = 6 hat.

$$\frac{|2+2\cdot(-1)-2\cdot(-3)+\mathrm{d}|}{3} = 6 \qquad \frac{|6+d|}{3} = 6$$ und daraus erneut d = -24 bzw. d = 12