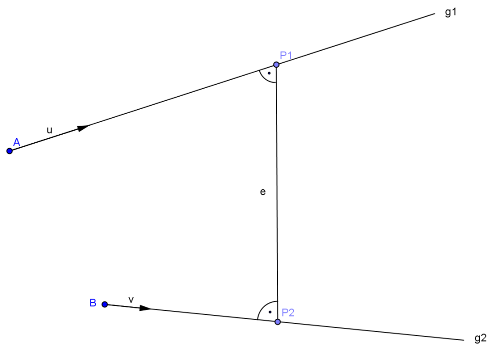
7.4. Kürzester Abstand e zweier windschiefer Geraden g_1 und g_2

1. Weg: Lösung über ein Gleichungssystem

Die Punkte $P_1 \in g_1$ und $P_2 \in g_2$ mit den Parametern t_1 und t_2 sind so zu bestimmen, dass der Verbindungsvektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ auf den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der beiden Geraden senkrecht steht:



B:

$$g_1: \vec{r} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \qquad g_2: \vec{r} = \begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix}-2t_1 - 2t_2 + 1\\ -t_1 + 3t_2 - 6\\ 4t_2 - 2\end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix}-2\\3\\4\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{u} = 0$ $\qquad -4t_1 - 4t_2 + 2 - t_1 + 3t_2 - 6 = 0$

$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{v} = 0$ $\qquad 4t_1 + 4t_2 - 2 - 3t_1 + 9t_2 - 18 + 16t_2 - 8 = 0$

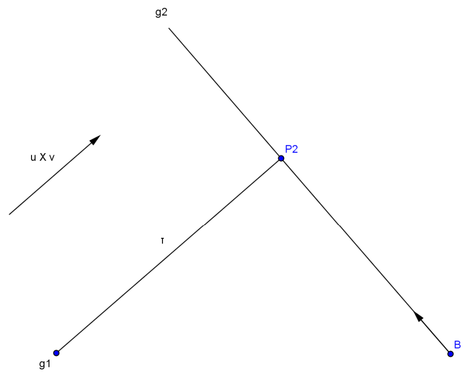
$$\left|\begin{matrix} -5t_1 - t_2 & = 4 \\ t_1 + 29t_2 & = 28 \end{matrix}\right| \qquad t_1 = -1 \qquad t_2 = 1$$

$P_1(-1, 3, 2)$ $P_2(0, 1, 4)$ $\qquad e = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = 3$

Anwendung (nach einer Idee von Heinz Blatter) bei der Bestimmung der Position eines Ballons:
Von zwei Punkten A und B aus werden zur gleichen Zeit mit dem Theodoliten die Richtungen zu einem Ballon gemessen (Azimut und Höhenwinkel). Wegen Ungenauigkeiten in den gemessenen Winkeln schneiden sich die zugehörigen Geraden i.a. nicht. Deshalb wird der kürzeste Abstand der beiden Geraden bestimmt und als Position des Ballons der Mittelpunkt dieser kürzesten Verbindung angenommen.

2. Weg: Spezialfall eines Transversalenproblems.

Der Richtungsvektor der Transversalen muss sowohl auf dem Richtungsvektor $\vec{u}$ von g_1 bzw. dem Richtungsvektor $\vec{v}$ von g_2 senkrecht stehen, hat also die Richtung von $\vec{u}\times\vec{v}$.
Der Punkt $A\in g_1$ und die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{u}\times\vec{v}$ legen eine Ebene τ fest, in der die gesuchte kürzeste Transversale liegt. $\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v})$ ist ein Normalenvektor von τ.



B:

$$g_1 : \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g_2: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren der Ebene τ:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{u}\times\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = 4\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor von τ:

$$\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v}) = 4\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ansatz für die Koordinatengleichung von τ:
$2x - 4y - 5z + 24 = 0$
Da die Koordinaten von A die Ebenengleichung erfüllen, ist d = 24 bestimmt.

Die Ebene τ ist mit der Geraden g_2: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ zu schneiden: $P_2(0, 1, 4)$.

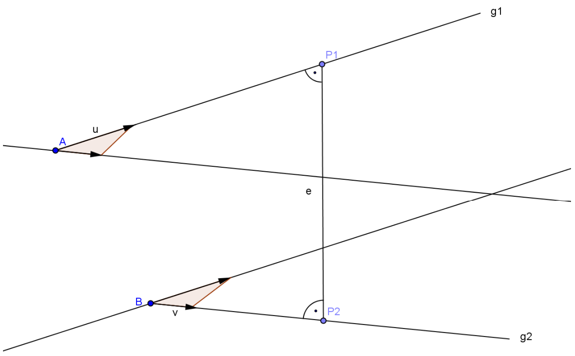
Die gesuchte Transversale t hat damit die Gleichung t: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

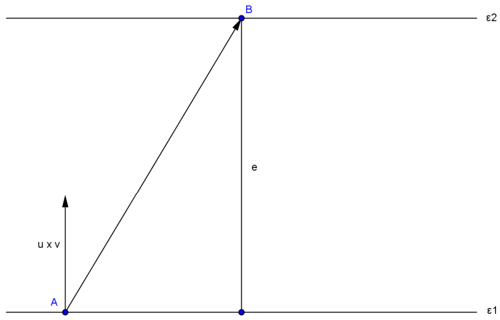
Die Transversale t schneidet die Gerade g_1 im Punkt $P_1(-1, 3, 2)$.
Für den kürzesten Abstand e erhält man schliesslich erneut $e = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = 3$

Kontrolle:
Der Verbindungsvektoren der Punkte P_1 und P_2 steht auf den Richtungsvektoren der beiden Geraden g_1 und g_2 senkrecht.

Das folgende Verfahren liefert nur die Länge des kürzesten Abstands:

3. Weg:
Verschiebt man die Gerade g_2 durch einen Punkt A von g_1, so ist dadurch eine Ebene $\varepsilon_1 = g_1\overline{g}_2$ festgelegt.
Verschiebt man die Gerade g_1 durch einen Punkt B von g_2, so ist dadurch entsprechend eine Ebene $\varepsilon_2 = \overline{g}_1 g_2$ festgelegt.





Der kürzeste Abstand e der beiden Geraden ist gleich dem Abstand der beiden parallelen Ebenen ε_1 und ε_2

ε_1: x - 2y + 2z + 3 = 0 ε_2 : x - 2y + 2z - 6 = 0

Er kann als Abstand des Punktes A(1, 4, 2) $\in$ ε_1 von der Ebene ε_2 nach Hesse bestimmt werden:

$$e = \frac{|1-2\cdot 4+2\cdot 2-6|}{3} = 3$$

Bem.:
Da dieser Abstand gleich der Länge der Normalprojektion des Vektors $\overrightarrow{AB}$ in Richtung des Vektors $\vec{u}\times\vec{v}$ ist, gilt:

$$e = \left|\overrightarrow{AB}\cdot\frac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}\right| = \frac{|(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\vec{u}\times\vec{v}|} = \frac{|(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB})|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}$$

Andere Formulierung dieses Resultats:
Die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ $\overrightarrow{AB}$ spannen ein Spat auf. Der kürzeste Abstand e ist die Höhe dieses Spats.

$$\vec{u}\times\vec{v} = 4\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \qquad |\vec{u}\times\vec{v}| = 12 \qquad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\-6\\-2\end{pmatrix} \qquad e = \frac{\left|\begin{pmatrix}4\\-8\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-6\\-2\end{pmatrix}\right|}{12} = \frac{36}{12} = 3$$